**Физично махало с променлива дължина**
**(или отново – от качествени към количествени разглеждания)**

Динамиката на въртене на идеално твърдо тяло отдавна е отпаднала от общозадължителния минимум по физика в средното училище и това едва ли може да се смята недостатък. Някакви начални знания за инерчен момент и момент на импулса фигурират в програмата за профилирана подготовка по физика и астрономия в 10. клас, а на по-високо равнище – в програмите за международни олимпиади по физика. (Вж. напр. съответната програма за олимпиадата в Загреб – 2010 г., в която са включени и теоремата на Щайнер, и въпросът за адитивност на инерчния момент.)

Ето защо е оправдано разглеждането на една задача от сборника на Гнедиг и съавтори[1], с която същевременно илюстрираме **идеята за преход от качествени към количествени разглеждания** като начин и за запознаване с една характерна черта на научния метод на познанието, и за задълбочаване на знанията по физика – идея, към която сме насочвали внимание и в други случаи[2]. Задачата е следната.

**Задача.** *Кофа с вода е окачена с въже за неподвижна точка. Кофата е изведена от равновесно положение и оставена да се люлее. Малък отвор на дъното на кофата е причина за изтичане на водата. Как се изменя периодът на люлеенията със спадане на равнището на водата?*

**Качествено решение.** Към задачата има указание да се изследва как се изменя положението на общия център на масите (ЦМ) на системата кофа–вода с изтичането на водата. А предложеното от авторите решение е:

“*Когато кофата е пълна с вода, ЦМ на водата е над този на кофата*[3] *и това е най-високото положение на общия ЦМ; следователно тогава периодът на люлеенията е най-кратък. Когато водата започне да изтича, общият ЦМ слиза надолу и периодът се удължава. Когато кофата е наполовина пълна, ЦМ на водата е под ЦМ на кофата и общият ЦМ е слязъл още по-ниско. Следователно и периодът се е увеличил. Когато кофата се изпразни обаче, общият ЦМ съвпада с ЦМ на празната кофа, който е по-високо, отколкото в предния случай. Това означава, че в някакъв момент понижаването на общия ЦМ на системата е спряло, след което, при по-нататъшното изтичане на вода, той е започнал да се изкачва нагоре. Накратко: периодът на люлеене е най-голям, когато общият център на масите е най-ниско. Както е показано в следващата задача*[4]*, това се случва, когато общият ЦМ лежи на свободната водна повърхност.*”

Какво трябва да ни удивлява в това решение? Очевидно фактът, че **нивото на водата спада постоянно, а периодът на махалото до един момент расте, след което започва да намалява**.

**Коментар към качественото решение.** Преди основния коментар – една бележка: защо в условието се указва, че отворът е *малък*? Отговорът на този въпрос става ясен, ако си представим екстремния случай, когато това условие не е налице, например липсва половината от дъното на кофата. В този случай водата ще се излее преди тя да извърши и едно люлеене. Това подсказва и колко малък трябва да бъде отворът: толко-

[1] **Gnadig P., G. Honyek, K. F. Riley** *200 Puzzling Physics Problems*, Cambridge University Press, 2001.
[2] **Попов Хр.** *Вариации върху “тема” от Тулчински*, Физика, 5, 2009, с. 260-262.
[3] Тук вероятно е необходимо малко пояснение. Ако кофата е цилиндър с дъно, ЦМ на кофата наистина е по-ниско от средата на цилиндъра, докато ЦМ на цилиндричния воден стълб е в центъра на цилиндъра.
[4] Вместо да търси цитирания сборник на Гнедиг, за да разбере каква е “следващата задача”, читателят може да намери неин аналог на адрес http://phys.uni-sofia.bg/~cpopov . Съответният файл е в папката Almanah-pdf /I chast/2 zadachi-eseta, а името му е 42 chasha s pyasak.

ва, че времената за извършване на две последователни люлеения да не се различават съществено (примерно, разликата да бъде в рамките на грешката при измерване на времето), така че да можем да говорим за периодичност. При това положение, когато говорим за период, имаме предвид величина, която всъщност зависи от времето и по-точно – от височината на водния стълб в даден момент, така че за по-голяма точност би трябвало да говорим за *моментен* период на люлеене.

Очевидно в случая разглеждаме една качествена задача и нейното чисто качествено решение, което по същество се опира на две неявно използвани твърдения:

1. Общият ЦМ на система от две тела се намира върху отсечката, свързваща центровете на масите на телата. (Тук може да се направи полезната добавка: и лежи поблизо до по-масивното тяло. Припомнете си правилото за равновесие на двустранен лост – опората трябва да е по-близо до приложната точка на по-голямата сила.)

2. Увеличаването на дължината на махалото увеличава и периода на люлеене.

Към първото от тези твърдения възражения няма. Второто, така както е формулирано тук, също не буди съмнение, защото, когато става дума за махало, интуитивно имаме предвид *математично* махало, за което наистина периодът расте с дължината ($T \sim \sqrt{l}$). Ако въжето, с което е привързана кофата е достатъчно дълго в сравнение с нейните размери, тогава наистина можем да смятаме, че махалото е математично. Периодът на математичното махало обаче не зависи от неговата маса и, ако случаят е такъв, задачата би била тривиална – дали от кофата тече или не тече вода, периодът би бил един и същ.

Този аргумент показва, че задачата е за **физично махало** и, за да поясним до какви усложнения води това, ще припомним формулата за период на физично махало:

(1)
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgl_{CM}}}\,.$$

Тук $I$ е инерчният момент на тялото спрямо оста, около която става люлеенето, $l_{CM}$ – разстоянието от оста до центъра на масите на тялото, $M$ – неговата маса, а $g$ – както обикновено, земното ускорение. Чрез въвеждане на величината:

(2)
$$l_0 = \frac{I}{Ml_{CM}}\,,$$

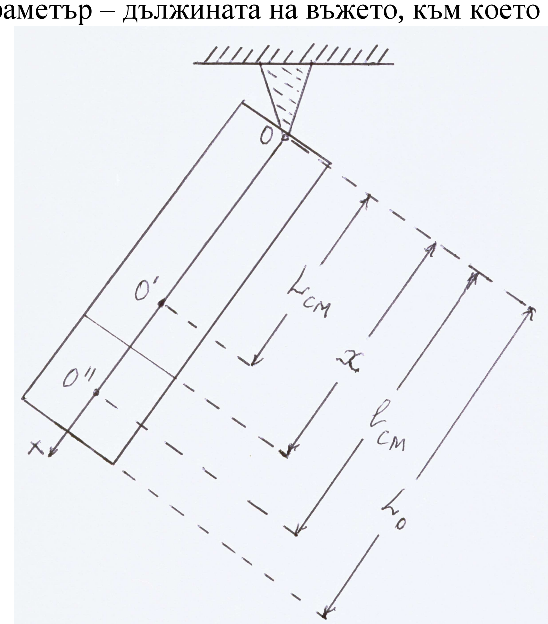
наречена *приведена дължина* на махалото, формула (1) придобива познатия вид на формулата за период на математично махало ($T = 2\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}}$), т.е. приведената дължина е дължината на онова математично махало, чиито период е равен на периода на физичното махало. Затова нататък промените на периода $T$ ще свързваме с измененията на $l_0$.

Във формула (1) обаче странно впечатление прави фактът, че величината $l_{CM}$, чието изменение следихме при качественото решение, е не в числителя, а в знаменателя! На пръв поглед оттук следва, че изводите би трябвало да бъдат обратни на изложените по-горе – в началото периодът би следвало да се скъсява, а да се удължава към края на изтичането на водата. Разбира се, подобно заключение е прибързано (авторите на сборника не биха допуснали толкова груба грешка!), защото сега изпускаме друго важно обстоятелство: с изтичане на водата инерчният момент на системата кофа–вода също се променя и тази зависимост е по-силна, защото инерчният момент на едно тяло зависи от **квадрата** на неговите размери, докато знаменателите в (1) и (2) са линейни функции на $l_{CM}$.

И именно в този пункт се поражда съмнение във коректността на качественото решение, защото, както ще видим по-долу, инерчният момент на системата не е **право**

**пропорционален** на квадрата на $l_{CM}$. За да проверим верността на качественото решение, трябва да разгледаме ситуацията и в количествено отношение.

**Количествено решение.** Преди всичко ще модифицираме леко задачата: вместо кофа, ще разглеждаме пълна с вода цилиндрична тръба, на дъното на която има малък отвор. В самия горен край на тръбата, по един от диаметрите ѝ минава ос, около която тръбата може да люлее подобно на кофата (фиг. 1). (С тази модификация избягваме един несъществен параметър – дължината на въжето, към което е привързана кофата.)




Фиг. 1.

Нека означим с $M_0$, $L_0$ и $I_0$ съответно масата, дължината и инерчния момент на **празната** тръба, а с $L_{CM}$ – разстоянието $|OO'|$ от оста на въртене до ЦМ на тръбата. Нека освен това с μ означим *линейната плътност* на водата (т.е. масата на цилиндричен стълб вода с височина единица и сечение, равно на напречното сечение на тръбата). В момента, когато свободната водна повърхност се намира на разстояние $x$ от т. $O$, масата на водата в тръбата е:

(3) $$m(x) = \mu(L_0 - x).$$

Лесно се пресмята, че ЦМ на водния стълб – т. $O$”, е на разстояние:

(4) $$l_{CM}(x) = x + \frac{L_0 - x}{2} = \frac{L_0 + x}{2}$$

от оста на въртене.

Щом знаем масите на празната тръба и на водата, както и положенията на техните центрове на масите, можем да изразим разстоянието $L_{CM}^{\text{общ}}$ от общия ЦМ на системата тръба–вода до т. $O$:

$$L_{CM}^{\text{общ}} = \frac{M_0 L_{CM} + m(x) l_{CM}(x)}{M_0 + m(x)},$$

където в знаменателя е общата маса $M$ на системата.

Изразът за $L_{CM}^{\text{общ}}$ ще използваме в знаменателя на формула (2), а тъй като там той е умножен с общата маса, видът на тяхното произведение се опростява:

(5) $$M^{\text{общ}} L_{CM}^{\text{общ}} = M_0 L_{CM} + m(x) l_{CM}(x).$$

Следващата стъпка е намиране на общия инерчен момент $I^{\text{общ}}$ на системата. Благодарение на адитивността на инерчния момент, той е сбор от две величини: от инерчния момент $I_0$ на празната тръба, и от променливия инерчен момент $I(x)$ на водния стълб. Известно е, че инерчният момент на хомогенен цилиндър с маса $m$ и височина $h$ спрямо ос през неговия ЦМ и перпендикулярна на оста на цилиндъра, се описва с формулата $\frac{1}{12}mh^2$. По тази формула инерчният момент на водния стълб спрямо т. $O$” е:

$$I^0(x) = \frac{1}{12}m(x)(L_0 - x)^2 . \tag{6}$$

На нас обаче ни е необходим инерчният момент $I(x)$ на водния стълб не спрямо т. $O$”, а спрямо оста на въртене, която е на разстояние $l_{\text{CM}}$ от т. $O$”. За да го намерим, използваме теоремата на Щайнер, според която:

$$I(x) = I^0(x) + m(x)l_{CM}^2(x) . \tag{7}$$

Така общият инерчен момент на системата се оказва:

$$I^{\text{общ}}(x) = I_0 + I^0(x) + m(x)l_{CM}^2(x) . \tag{8}$$

С това подготвителната работа е завършена. С помощта на резултата (5) по формула (2) изразяваме приведената дължина $l_0$ на махалото:

$$l_0(x) = \frac{I^{\text{общ}}}{M^{\text{общ}}L_{CM}^{\text{общ}}} = \frac{I_0 + I^0(x) + m(x)l_{CM}^2(x)}{M_0L_{CM} + m(x)l_{CM}(x)} . \tag{9}$$

Като заместим тук изразите за $m(x)$, $l_{CM}$ и $I^0(x)$ съответно от (3), (4), и (6), окончателно получаваме:

$$l_0(x) = \frac{I_0 + \frac{1}{12}\mu(L_0 - x)^3 + \mu(L_0 - x)\left(\frac{L_0 + x}{2}\right)^2}{M_0L_{CM} + \mu(L_0 - x)\frac{L_0 + x}{2}} . \tag{10}$$

Със сметките – дотук. Вижда се, че зависимостта на приведената дължина на махалото (а оттук – и на периода му), от положението $x$ на свободната водна повърхност е твърде сложна. Във всеки случай – съвсем не е право пропорционална на разстоянието $l_{CM}$ от оста на въртене до общия ЦМ на системата. Оттук следва, че заключението за наличие на максимум на $l_0$, направено при качественото решение на задачата, може да е вярно, но може и да не е вярно. Със сигурност обаче не е вярно, че ако такъв максимум съществува, той се получава, когато общият ЦМ на системата е върху свободната повърхност на водата.

**Коментар към количественото решение.** Със сложния си вид формули от типа (10) винаги будят съмнение, че при извода им може да е допусната формална грешка. Най-добрият начин за отстраняване на съмненията е, разбира се, внимателното повтаряне на извода. Частична проверка обаче може да се направи и като формулата се приложи за някои частни случаи, в които крайният резултат може да се предвиди от физични съображения. Така ще постъпим и в случая.

А) Случаят $x = L_0$ съответства на момента, когато от тръбата е изтекла всичката вода. В този случай приведената дължина трябва да е равна на приведената дължина на празната тръба. Наистина, от (10) при $x = L_0$ получаваме:

$$l_0 = \frac{I_0}{M_0L_{CM}} ,$$

което е в съгласие с формула (2).

Б) Когато масата и инерчният момент на тръбата са пренебрежимо малки, при $x \to L$ би трябвало да получим, че приведената дължина е равна на дължината на тръбата, т.е. когато в **такава** тръба остане съвсем малко вода, периодът на люлеене трябва да бъде като на математично махало с дължина $L_0$. Лесно се проверява, че наистина при $M_0 = 0$, $I_0 = 0$ и $x \to L_0$, от (10) следва $l_0 = L_0$, т.е. формула (10) издържа и тази проверка.

**Възможност за изследователска работа.** Формула (10) посял съмнения във валидността на извода, направен при качественото решаване на задачата. Какво още би могло да се направи, за да има все пак някакъв по-определен резултат?

Ако сред вашите ученици има бъдещи олимпийци, или въобще такива, които имат склонност към изследвания, можете да им предоставите три възможности:

1. Ако те са добри математици и владеят основни умения за диференциране, предложете им да намерят производната на $l_0$ от (10) по $x$ и да проверят дали тя се анулира в интервала $0 < x < L_0$. Анулирането на първата производна е указание за наличие на екстремум на приведената дължина и съответно – на периода на махалото. След това може да се изследва къде (т.е. – при каква стойност на $x$) е екстремумът, вида му (минимум или максимум) и т.н.

2. Във формула (10) фигурират като параметри величините $I_0$, $M_0$, $L_0$, $L_{CM}$ и $\mu$. Ако учениците обичат да работят с компютри, задайте на тези параметри разумни конкретни стойности. Тогава, с помощта на подходяща компютърна програма (напр. от типа Origin), те могат да получат графиката на функцията, зададена с формула (10). След това, като променят последователно параметрите, могат да следят как се изменя видът на графиката, има или няма екстремуми, от какво зависи наличието и положението им и т.н.

3. Ако ли пък учениците ви обичат да експериментират, реализирайте опитна постановка с пробита тръба, от която бавно изтича вода. В допълнение ще ви бъде необходим само хронометър, за да проверите как се променя периодът с течение на времето. Най-подходяща за целта е прозрачна тръба с деления по дължината й – в този случай по деленията директно ще отчитате и стойностите на $x$.

Недостатък на опитното изследване е невъзможността да се променят параметрите.

Разбира се, в най-благоприятния случай три групи ученици може да работят поотделно по трите начина, като накрая резултатите им да се сравняват.

Както се вижда, разгледаната задача предоставя добри възможности и за задълбочаване на знанията, и за математическо изследване на проблема, и за практическа проверка на теоретичните резултати.