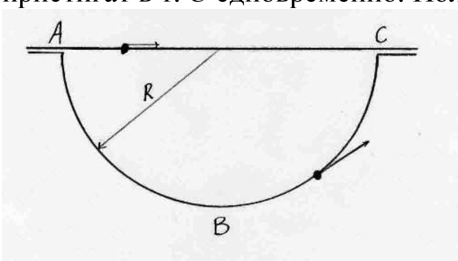
Пример за комбиниране на метода на
екстремните стойности и метода на размерностите

Методът на размерностите, макар и рядко прилаган в училище, все пак поне по принцип е познат. Не толкова популярен е методът на екстремните (или граничните) стойности. Последният се прилага при качествен анализ на физични задачи, като се разглежда случай (или няколко случая), в който някоя (или няколко) от величините, участващи в условието на задачата, приема екстремни стойности (напр. нула, безкрайност и др.п.).

По-долу разглеждаме пример, в който комбинирането на двата метода дава забележително добър резултат.

Задача: По гладките нишки *AC* и *ABC* се движат еднопосочно без триене две маниста (фиг. 1). В т. *A* манистата пристигат едновременно с еднакви скорости. Покажете, че съществува такава стойност на скоростта в т. *A*, при която манистата пристигат в т. *C* едновременно. Полуокръжността *ABC* лежи във вертикална равнина.



Фиг. 1.

Решение: Доказателството обикновено използва *метода на екстремните стойности*. Ще анализираме състоянията на системата за две екстремни стойности на скоростта v, с която манистата пристигат в т. *A*.

Първо разглеждаме случая $v \to 0$, т.е. при много малка скорост v (малка например спрямо скоростта, която придобива едно тяло при свободно падане от височина R). В този случай на манистото, което се движи по отсечката *AC*, ще е необходимо безкрайно дълго време, за да достигне т. *C*. Второто манисто обаче ще се ускори по дъгата *AB*, ще придобие някаква крайна скорост и, след като премине т. *B*, въпреки че забавя движението си, ще достигне т. *C* за някакъв краен интервал време[1]. Следователно при достатъчно малки скорости второто манисто изпреварва първото при достигане на т. *C*.

Другият екстремен случай е при големи скорости, например скорости, които са много по-големи от скоростта, която придобива едно тяло при свободно падане от височина R. И в този случай скоростта на второто манисто по дъгата *ABC* ще бъде по-голяма от скоростта на първото, но относителното увеличение ще бъде малко и при $v \to \infty$ изобщо може да се пренебрегне, т.е. можем да смятаме, че двете маниста се движат практически с еднакви скорости. И тъй като пътят на първото (отсечката *AC*) е по-къс, то ще пристигне в т. *C* преди другото манисто, т.е. резултатът е противоположен на получения в първия случай.

Не съществуват физични основания да смятаме, че с нарастване на v от нула до безкрайност времената на движение ще имат минимуми или максимуми – те би трябвало да намаляват непрекъснато (както казват математиците – монотонно). Следователно единственото, което можем да заключим е, че съществува някаква

[1] Лесно се съобразява, че този краен интервал е точно полупериода на математично махало с дължина R при амплитуда $\pi/4$. Известно е, че формулата, която изразява периода на математичното махало с неговата дължина и със земното ускорение g при произволна амплитуда, не се изразява с елементарни функции (какъвто е познатият в училище случай при малки амплитуди). Полупериодът на математично махало при амплитуда $\pi/4$ е $3{,}71\sqrt{\dfrac{R}{g}}$, т.е. значително по-голям, отколкото $3{,}14\sqrt{\dfrac{R}{g}}$ – стойност, която бихме получили по познатата формула за малки амплитуди.

крайна стойност на началната скорост – да я означим с v_0, при която топчетата пристигат в т. C едновременно. (Тук неявно използваме едно твърдение, което в математиката се нарича принцип на непрекъснатост.)

Така методът на екстремните стойности помогна да докажем **съществуването** на решение на задачата. Както в повечето случаи на доказателства за съществуване, решението не дава указание как да се търси неизвестната величина (в случая – v_0), а още по-малко – каква е нейната стойност. За точното решение на задачата е необходимо да се напишат законите за движение на двете топчета и да се приравнят времената на пристигане в т. C – това равенство ще представлява уравнение за v_0. За беда, скоростта на топчето по дъгата не се изразява чрез елементарни функции (съдържа елиптичен интеграл) и намирането на точното решение излиза извън границите на правените тук разглеждания.

В случая обаче може да помогне друг често използван във физиката метод – методът на размерностите. Според него, за много физични задачи отговорът може да бъде предсказан по порядък (т.е. с точност до множител, който не е много различен от единица) само от съображения, свързани с размерностите на величините, от които зависи търсената величина. В случая с манистата, този метод ще помогне да преобразуваме качествения характер на задачата в количествен.

И така, ние не се задоволяваме с доказателството, че съществува такава скорост v_0, при която двете топчета пристигат едновременно в т. C – искаме да знаем ако не точно, поне по порядък колко е тази скорост. Първият въпрос, който трябва да си зададем, е от какво може да зависи нейната големина. Той е свързан само с движението на второто манисто по дъгата ABC, защото движението на първото е равномерно. Ускоряването и забавянето на второто манисто се дължат на силата на тежестта (или по-точно – на нейната съставяща, тангенциална към дъгата ABC), което сочи, че отговорът сигурно ще зависи от земното ускорение g. Единствен друг параметър, от който може да зависи v_0, е радиусът R на тази дъга.

Вторият въпрос е има ли комбинация от величините g и R с размерност на скорост (ако такава комбинация няма, значи не сме отчели някакъв съществен параметър). Тъй като размерността на ускорението е m/s^2, а на радиуса – m, единствената комбинация с размерност на скорост е:

$$\left[\sqrt{Rg}\right] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Според метода на размерностите търсената скорост v_0 с голяма вероятност не е примерно 1000 пъти по-голяма от $\sqrt{Rg}$, или 100 пъти по малка от $\sqrt{Rg}$.

От закономерностите при свободно падане знаем, че не $\sqrt{Rg}$, а $\sqrt{2Rg}$ има ясен физичен смисъл – това е скоростта, която придобива тяло при свободно падане от височина R. Затова по-нататък ще търсим сравнение на v_0 не с $\sqrt{Rg}$, а с величината:

(1) $$u = \sqrt{2gR}.$$

Нека предположим, че в т. A манистата са имали скорост u. Първа оценка, която можем да направим, е за максималната скорост v, която второто манисто има в т. B. Тъй като в тази точка потенциалната енергия на манистото е намаляла с mgR, законът за запазване на механичната енергия се изразява с равенството:

$$\frac{mu^2}{2} = \frac{mv^2}{2} - mgR.$$

Оттук определяме, че:

$$v = \sqrt{u^2 + 2gR} = \sqrt{u^2 + u^2} = u\sqrt{2}.$$

Ако предположим, че по цялата дъга *ABC* манистото се движи с тази максимална скорост, то би изминало пътя си (чиято дължина е πR) за време $\frac{\pi R}{u\sqrt{2}}$. Тъй като с изключение на т. *B* скоростта на манистото е по-малка от $u\sqrt{2}$, времето *t*” за изминаване на дъгата *ABC* ще удовлетворява неравенството:

(2) $$t'' > \frac{\pi R}{u\sqrt{2}}.$$

В същото време първото манисто, което се движи равномерно със скорост *u*, изминава своя път (дълъг 2*R*) за време $t' = \frac{2R}{u}$. Като определим оттук $\frac{R}{u}$ и го заместим в (2), получаваме:

(3) $$t'' > \frac{\pi}{2\sqrt{2}}t'.$$

Понеже $\frac{\pi}{2\sqrt{2}} > 1$, от (3) следва, че *t*” > *t*’, т.е. при скорост $u = \sqrt{2gR}$ второто манисто пристига в т. *C* след първото. Но нали при много малки скорости съотношението беше обратното – второто манисто изпреварва първото! Единственото заключение, което можем да направим в случая за търсената скорост е, че:

(4) $$0 < v_0 < \sqrt{2gR}.$$

Така съчетаването на двата метода – на метода на екстремните стойности и на метода на размерностите – дава възможност за получаване на една нетривиална оценка за интервала, в който лежи стойността на неизвестната величина.[2]

По-нататък бихте могли:

– Да покажете, че ако дъгата *ABC* е не под, а над отсечката *AC*, задачата няма решение, т.е., независимо от скоростта, с която манистата стигат т. *A*, в т. *C* първо пристига манистото, което се движи по праволинейната траектория.

– Да проверите дали оценката (4) не може да се подобри, ако използваме не скоростта $\sqrt{2gR}$, а тази, която директно ни подсказа методът на размерностите – $\sqrt{gR}$ (все пак множителят $\sqrt{2}$ вкарахме в разсъжденията си без сериозни аргументи).

---

[2] По-взискателният читател би могъл да отбележи, че неравенство (4) изключва случая $v_0 \sim 1000\sqrt{2gR}$, но не изключва например $v_0 \sim 0{,}01\sqrt{2gR}$. Пресмятанията показват, че $v_0 \approx 0{,}87\sqrt{2gR}$ и следователно методът на размерностите и в този случай дава решението с точност до множител от порядъка на 1 (0,87 ~ 1). Оставяме на читателя да помисли дали долната граница за v_0 в (4) не би могла да се подобри, без да се излиза извън границите на елементарната математика.