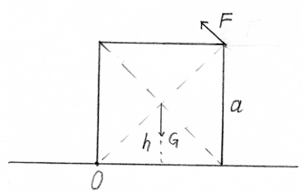
# Равновесието на кое тяло е по-устойчиво?

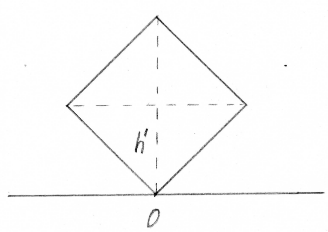
В училище учим, че има три вида равновесие: устойчиво, неустойчиво и безразлично. Често обаче казваме, че равновесието на едно тяло е *по-устойчиво* от равновесието на друго тяло, без да посочваме ясно по какъв критерий сравняваме две *устойчиви* равновесия. Известно е например, че устойчивостта на равновесното положение на тяло, поставено върху опора, зависи както от големината на опорната площ, така и от височината на центъра на масите над опорната площ. Първата зависимост обаче понякога се забравя и се смята, че при две тела с еднаква форма е валидно правилото “по-устойчиво е равновесието на тялото, чиито център на масите е по-ниско”. Че това не винаги води до правилни изводи ни убеждава следната задача.

**Задача.** Две хомогенни кубчета от еднакъв материал, но с различни размери, лежат върху грапава хоризонтална равнина. Чие равновесие е по-устойчиво?

**Анализ.** Очевидно е, че равновесните положения и на двете кубчета са *устойчиви*. Очевидно е също така, че центърът на тежестта на по-малкото кубче се намира по-ниско, отколкото този на по-голямото. Затова първата мисъл, която минава на човек е, че равновесието на малкото кубче е по-устойчиво. Както ще се убедим, положението е точно обратното.

Преди да отговорим на поставения в задачата въпрос, трябва да изясним критерия, по който ще сравняваме и степенуваме устойчивостта на две устойчиви равновесни положения. В равновесното си положение всяко от кубчетата лежи върху една от стените си. Тъй като равнината, върху която лежат е грапава, т.е. триенето между допиращите се повърхности е достатъчно голямо, сила, действаща върху една от стените, не може да премести кубчето – възможно е само нейният въртящ момент да предизвика завъртането му спрямо долния ръб *O* на противоположната стена (фиг. 1).




Фиг. 1 Фиг. 2

Като един критерий за устойчивост можем да използваме силата, която предизвиква превъртането на кубчето, след което то ляга върху стената, противоположна на тази, върху която е приложена силата? От фиг. 1 се вижда, че движението на кубчето се определя от въртящите моменти на две сили – на силата на тежестта *G*, и действащата сила *F*. В началното положение рамото на тежестта е $\frac{a}{2}$, където *a* е дължината на ръба на кубчето. Големината на силата *F*, която може да предизвика превъртане на кубчето, е минимална, когато рамото ѝ е максимално, т.е. – когато тя действа в горния ръб на кубчето перпендикулярно на диагонала, чиято дължина е $a\sqrt{2}$ . Следователно превъртането ще започне, когато тази големина надмине определената от равенството:

$$Fa\sqrt{2} = G\frac{a}{2}, \qquad \text{т.е. при} \qquad F > \frac{G}{2\sqrt{2}}.$$

Тъй като силата на тежестта на по-голямото кубче е по-голяма, заключаваме, че за да започне претъркулването на по-голямото кубче е необходима по-голяма сила. Следователно, когато за критерий приемем силата, с която можем да прекатурим кубчето, трябва да заключим, че равновесното положение на по-голямото кубче е по-стабилно, въпреки че центърът на масите му е разположен по-високо.

Дали обаче използваният критерий е достатъчно убедителен за направеното заключение? Работата е там, че при завъртане на кубчето рамото на силата на тежестта намалява и, когато центърът на масите се окаже над ръба, около който става въртенето, това рамо става нула. Ако по време на завъртането силата $F$ запази големината си (и рамото си), кубчето ще придобие някаква кинетична енергия. За да останем в рамките на статиката, трябва да предположим, че във всяко от междинните положения равенството между моментите на двете сили се запазва, а това означава, че големината на силата $F$ трябва да намалява по подходящ начин. Този факт вече хвърля известно съмнение върху пригодността на силата като критерий за сравнение на устойчивостта на две кубчета с различни размери.

По-убедителен критерий осигурява енергетичният подход. За целта обръщаме внимание на факта, че след започване на превъртането центърът на масите на кубчето започва да се издига, т.е. външната сила $F$ извършва определена работа. Равновесието ще се наруши, т.е. кубчето ще се претърколи върху съседната стена, ако центърът на масите се окаже над ръба, около който става завъртането.

Този анализ подсказва, че като мярка, като критерий за устойчивостта на равновесието, е удобно да използваме минималната работа на външната сила за претъркулване на кубчето. А тъй като от енергетична гледна точка единственият резултат от действието на външната сила е повишаването на потенциалната енергия на тялото, по-устойчиво ще смятаме това положение, извеждането от което изисква по-голямо увеличение на неговата потенциална енергия. За прилагане на този критерий обаче са необходими количествени пресмятания.

**Количествено решение**

От фиг. 1 се вижда, че височината $h$ на центъра на масите на кубчето в равновесното положение е:

(1) $$h = \frac{a}{2}.$$

Ако означим с ρ плътността на кубчето и отчитаме гравитационната потенциална енергия от равнището на долната му стена, в равновесното положение тази енергия е:

(2) $$E_{p1} = mgh = \rho g a^3.\frac{a}{2} = \rho g \frac{a^4}{2}.$$

Височината на центъра на масите на кубчето, когато той се намира над неподвижния ръб (фиг. 2), е *h'* = $a\frac{\sqrt{2}}{2}$, а потенциалната енергия:

(3) $$E_{p2} = mgh' = \rho g a^3 . a\frac{\sqrt{2}}{2} = \rho g a^4 . \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

От (3) и (2) получаваме, че увеличението на потенциалната енергия е:

(4) $$E_{p2} - E_{p1} = \rho g a^4 \frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

Вижда се, че работата, която трябва да извърши външната сила, за да извади кубчето от равновесното му положение, е пропорционална на четвъртата степен от неговия ръб. Следователно, и по този, енергетичен, критерий, въпреки че центърът на масите на по-голямото кубче се намира по-високо, отколкото центърът на масите на по-малкото, по-устойчиво е положението именно на по-голямото кубче.

**Една бележка.** Обърнете внимание на условието, в което изрично се подчертава, че кубчетата лежат върху *хоризонтална* равнина. Това е съществено, защото, ако опорната плоскост не е хоризонтална, въпросът за стабилността на равновесието може да стои и по друг начин. Ако например разглежданите кубчета ни служат като модели на селскостопански машини, които трябва да работят устойчиво и на наклонени терени, от значение ще бъде не силата, която ги преобръща (или нейната работа), а наклона на опорната площ, при който вертикалата през центъра на масите минава през оста на завъртане. Докато разглеждаме хомогенни кубчета, този наклон е един и същ – 45°, независимо от големината им, т.е. трябва за заключим, че в това отношение всички кубчета са еднакво стабилни.

А по-отношение на правилото, че "по-устойчиво е равновесието на тяло, чиито център на масите е по-ниско" трябва да кажем, че то би трябвало да се изказва по-малко по-различен начин: "Равновесието на *едно* тяло е толкова по-устойчиво, колкото неговият център на тежестта е по-ниско." С други думи, то е валидно, когато се сравняват устойчиви равновесия не на различни (макар и с еднаква форма) тела, а на едно и също тяло, но при различни разпределения на масите в него (напр. различно разместване на товарите в един кораб или в друго превозно средство).