Панорамно огледало

На всеки автомобил са монтирани едно или няколко огледала за наблюдаване пътната обстановка зад автомобила. Използват се както плоски, така и изпъкнали сферични огледала. Последните осигуряват обзор на по-голям ъгъл, поради което понякога се наричат панорамни огледала. Мнозина шофьори обаче смятат, че панорамните огледала притежават следния недостатък: когато отзад се приближава друг автомобил, въпреки че се движи равномерно, скоростта на нарастване на изображението му в панорамното огледало не е постоянна – в началото е твърде малка в сравнение с тази в момента на задминаването. Ето защо шофьорът на предната кола късно забелязва изпреварващата го и може да се случи да реагира неадекватно на ситуацията. Дали това е наистина така ще покаже решението на следната задача.

Преди това ще отбележим, че разглеждаме равномерно движещи се коли. Тъй като от значение е само тяхното относително движение, ще смятаме, че предната кола е неподвижна, а задната се приближава към нея със скорост v.

Задача. Намерете връзката между скоростта v на равномерно движещ се по главната оптична ос на изпъкнало сферично огледало предмет и скоростта на движение на неговия образ в огледалото. Сравнете получения резултат с този, който би се получил при плоско огледало.

Решение

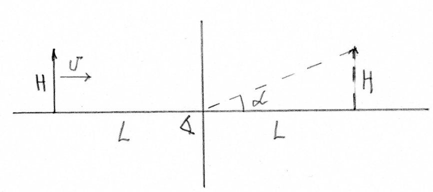
Ще решим задачата при опростяващото предположение, че окото на наблюдателя е до самото огледало.

Да разгледаме първо по-простия случай на плоско огледало. На фиг. 1 е показан предмет с височина H, който се приближава със скорост v към плоско огледало. Ако в началния момент $t = 0$ разстоянието между предмета и огледалото е L_0, в момента t това разстояние ще бъде:

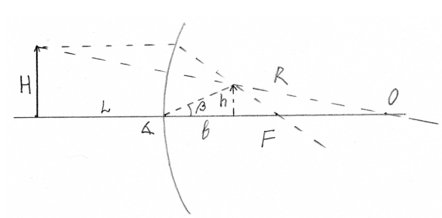
(1) $$L = L_0 - vt.$$

Същото е и разстоянието до образа на предмета, така че тангенсът на ъгъла α, под който се вижда от огледалото този образ, е:

(2) $$\mathrm{tg}\alpha = \frac{H}{L} = \frac{H}{L_0 - vt}.$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Нека сега, като използваме същите означения, разгледаме отражението в сферично огледало с радиус R (фиг. 2). Тъй като фокусът на огледалото отстои на разстояние $R/2$ от върха на огледалото, разстоянието b от върха до образа определяме по познатата формула:

(3) $$\frac{1}{L} - \frac{1}{b} = -\frac{2}{R},$$

(знаците минус показват, че и фокусът, и образът са зад огледалото). От формула (3) изразяваме b:

(4) $$b = \frac{RL}{R+2L}.$$

Височината h на образа намираме от подобните правоъгълни триъгълници с общ връх в т. O и вертикални катети, равни съответно на h и H:

$$\frac{h}{R-b} = \frac{H}{L+R}.$$

Оттук, като заместим b с израза (4), за h намираме:

(5) $$h = \frac{RH}{R+2L}.$$

Тангенсът на ъгъла β, под който от върха на огледалото се вижда образът на предмета е tgβ = h/b. Като заместим тук h и b със съответните изрази от (5) и (4), получаваме:

(6) $$\mathrm{tg}\beta = \frac{H}{L} = \frac{H}{L_0 - vt}.$$

Вижда се, че и в двата случая, и при плоско, и при сферично огледало, гледано от точка, намираща се до огледалото, зависимостта от времето на ъгъла, под който се вижда образът, е една и съща.

Лесно се проверява, че скоростта, с която се променя този ъгъл наистина не е постоянна. Като диференцираме (2) или (6) по времето, получаваме:

(7) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathrm{tg}\alpha = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathrm{tg}\beta = \frac{Hv}{(L_0 - vt)^2}.$$

Формула (7) показва, че скоростта, с която нараства ъгълът е най-малка в началния момент (Hv/L_0^2), расте неравномерно и става безкрайно голяма в момента, когато предметът се изравнява с огледалото. Съществено за шофьорите обаче е обстоятелството, че зависимостта на тази скорост от времето е една и съща и за плоско, и за сферично огледало.

Коментар. Както отбелязахме, получените резултати са валидни при условие, че окото но шофьора е долепено до самото огледало. Нека сега разгледаме една по-реалистична ситуация. Фактически, шофьорът е на известно разстояние от огледалото. Обикновено това разстояние е от порядък на радиуса на сферичното огледало и затова ще го приемем равно на R. Като пренебрегнем факта, че окото не е върху оптичната ос, тангенсът на ъгъла α, под който се вижда изображението в плоското огледало ще бъде:

(8) $$tg\alpha = \frac{H}{R+L},$$

а скоростта на нарастването му:

(9) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathrm{tg}\alpha = \frac{Hv}{(R+L)^2}.$$

Аналогично, тангенсът на ъгъла β, под който се вижда образът в сферичното огледало, ще бъде:

(10) $$\mathrm{tg}\beta = \frac{h}{R+b} = \frac{H}{R+3L}.$$

Скоростта на неговото нарастване е съответно:

(11) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} tg\beta = \frac{3Hv}{\left(R+3L\right)^2}.$$

В момента, когато задната кола надминава предната, т.е., когато $L = 0$, скоростта на нарастване на ъгъла в сферичното огледало е три пъти по-голяма от съответната скорост в плоското огледало.

Обратно, когато разстоянието между колите е много по-голямо от радиуса на сферичното огледало и R може да се пренебрегне спрямо L, скоростта, с която нараства ъгъл β е три пъти по-малка от скоростта на нарастване на ъгъл α.

Извод: В реалната ситуация, при която не се пренебрегва разстоянието между шофьора и огледалото, сферичното огледало наистина проявява споменатия в началото недостатък: когато изпреварващата кола е далече, шофьорът на изпреварваната може да не забележи нарастването на образа. Това ще създаде у него впечатление, че двете коли се движат с еднакви скорости и той може да предприеме маневри, които в случая да се окажат опасни: напр. да прави ляв завой, самият той да започне да задминава друга кола и др.п.