Топлообмен чрез топлопроводност

В обръщението “Към читателя” писах, че един от критериите за подбор на материалите е изискването в тях да има нещо, което да удивлява. Има раздели на физиката, в които не е трудно да се открият примери, предизвикващи удивление, защото изучаването им в училище пропуска някои съществени явления. Например в механиката не се разглежда влиянието на съпротивлението на въздуха върху движението на телата, или особеностите на движенията в нехомогенно гравитационно поле, при електричните явления не се изучават количествени зависимости за влиянието на температурата върху съпротивлението на металите и т.н., и т.н. Използването на тези празноти е един от начините да се търсят възможности за предизвикване на интерес и удивление. Друг начин е да се разглеждат примери, решаването на които изисква нетрадиционни за училищната практика математични методи – например числено решаване на алгебрични уравнения от по-висока (трета, четвърта степен и пр.) с подходящи компютърни програми или графично. Оказва се обаче, че даже в калориметрията – един класически раздел, който сега се изучава в 8. клас, може да се намерят интересни примери, които могат да се разгледат с елементарни математически средства и, на всичкото отгоре, представляват не само “академичен интерес”, но служат и за разбиране на действието на важни практически приложения. По-долу е изложен вариант на такъв пример, подробно разгледан в и на друго място цитираната книга на Маковецкий[1]. Фактът, че примерът е разбираем за всеки наш осмокласник, който с желание изучава физиката, несъмнено повишава неговата ценност.

За да стане максимално ясна същността на примера, може да започнем със следната най-опростена задача.

Задача. В два съда са налети съответно литър студена вода с температура $t' = 0$ ºC, и литър гореща вода с температура $t'' = 100$ ºC. Възможно ли е като отнемаме топлина от горещата вода и я предаваме на студената (без да използваме външни източници на енергия!) да стигнем състояние, в което температурата на първоначално студената вода е по-висока от температурата на първоначално горещата вода?

Анализ. Тъй като за студената и за горещата вода в условието се говори като за две отделни тела, решението явно не трябва да включва смесване на течностите. Освен това условието на задачата не предполага използване на някакви топлинни машини, така че по начало ще се ограничим само с процеси на топлообмен. Първото нещо, което в случая идва наум на човек е, че и трите начина на топлообмен (топлопроводност, конвекция и лъчеизпускане и лъчепоглъщане) водят само до изравняване на температурите на телата в една система, така че няма смисъл например да осъществяваме топлинен контакт между двата съда.

От друга страна, ако разсъждаваме ad hoc, щом има такава задача, сигурно съществува и начин за решаването ѝ. Единственото, което можем да направим, е да осъществяваме топлообмена не между целите тела, а някак на части, за което ще ни бъдат необходими допълнителни съдове[2]. Топлинните капацитети както на съдовете със студената и с топлата вода, така и на допълнителните съдове, ще пренебрегваме спрямо топлинните капацитети на количествата вода, с които ще манипулираме.

Количествено разглеждане. Да означим с m масата на водата във всеки от съдовете, а с c – специфичния топлинен капацитет на водата. Да отлеем половината от студената вода в празен съд и да го поставим в топлинен контакт със съда с гореща вода. В резултат от топлообмена между двата съда в тях ще се установи някаква обща температура t_1, която може да пресметнем от уравнението на топлинния баланс:

---

[1] **Маковецкий П.В.** Смотри в корень!, М., Наука, 1979.

[2] Условието на задачата не забранява използването на допълнителни съдове, а в една демократична страна, в каквато безспорно живеем, всичко, което не е изрично забранено, е позволено.

(1) $$cm(t''-t_1)=c\frac{m}{2}(t_1-t'),$$

чието решение е:

(2) $$t_1=\frac{2t''+t'}{3}=\frac{2.100+0}{3}=66{,}6\ {}^{\circ}\mathrm{C}.$$

Нека след това осъществим топлинен контакт на останалия половин литър студена вода с охладената до 66,6 ºC гореща вода – след топлообмена между тях отново ще се установи обща температура, която ще означим с t_2, и която също определяме от уравнението на топлинния баланс:

(3) $$cm(t_1-t_2)=c\frac{m}{2}(t_2-t').$$

Като заместим тук t_1 от (2) и решим спрямо t_2, получаваме:

(4) $$t_2=\frac{2t_1+t'}{3}=\frac{2.66{,}6+0}{3}=44{,}4\ {}^{\circ}\mathrm{C}.$$

В резултат имаме литър вода с температура 44,4 ºC (началната гореща вода) и половин литър от началната студена вода, сега също с температура 44,4 ºC. Добавяме този половин литър към предишния половин литър и вече без много сметки намираме, че общата температура на водата, която в началото бе студена, сега ще бъде $\frac{66{,}6+44{,}4}{2}=55{,}5\,{}^{\circ}\mathrm{C}$.

И така, решението е намерено, защото водата, която в началото имаше температура 100 ºC, сега има температура 44,4 ºC, а водата с начална температура 0 ºC, се загря до 55,5 ºC, т.е. достигнехме състояние, в което съотношението между температурите е обратно на началното – разликата в температурите е 11 ºC.

Обърнете внимание: законът за запазване на енергията е спазен – тъй като началните (и крайните) количества вода са равни, с колкото градуса се повишава температурата на студената вода, с толкова намалява температурата на горещата! Този факт ще използваме по-нататък, за да си спестим малко пресмятания.

Оттук нататък започват въпросите.

Първи въпрос. Какво би станало, ако в началото бяхме разполовили не студената, а горещата вода, а след това повторим в същия ред останалите манипулации? Проверете сами – резултатът е същият.

Втори въпрос. Доколко съществен за резултата е фактът, че разполовихме началното количество вода? А ако бяхме взели не 1/2, а 1/3 от водата? На този въпрос можем да отговорим само, ако направим пресмятанията. Те вече са малко по-дълги и може би – скучни за осмокласник, но за да отговорим на въпроса, трябва да ги извършим.

И така, поставяме количество $\frac{m}{3}$ от студената вода в контакт с горещата. След топлообмена се установява равновесна температура t_1, която определяме от уравнението за топлинния баланс:

(5) $$cm(t''-t_1)=c\frac{m}{3}(t_1-t').$$

Решението е:

(6) $$t_1=\frac{3t''+t'}{4}=\frac{3.100+0}{4}=75\ {}^{\circ}\mathrm{C}.$$

След това вземаме втора порция студена вода с маса $\dfrac{m}{3}$ и я поставяме в контакт с охладения до 75 ºC литър вода. След топлообмена се установява температура t_2, която определяме от уравнението на топлинния баланс:

(7) $$cm(t_1 - t_2) = c\frac{m}{3}(t_2 - t'),$$

чието решение е:

(8) $$t_2 = \frac{3t_1 + t''}{4} = \frac{3.75 + 0}{4} = 56{,}25 \text{ ºC}.$$

В края осъществяваме топлообмен между литъра вода с температура 56,25 ºC и последната третина от студената вода. Равновесната температура t_3 определяме отново от уравнението на топлинния баланс, което сега има вида:

(9) $$cm(t_2 - t_3) = c\frac{m}{3}(t_3 - t'),$$

а решението му е:

(10) $$t_3 = \frac{3t_2 + t'}{4} = \frac{3.56{,}25 + 0}{4} = 42{,}1875 \text{ ºC}.$$

И така, този път, когато делихме студената вода на 3 равни части, горещата се охлади до 42,2 ºC, т.е. повече, отколкото когато я делихме само на две части (тогава тя се охлади до 44,4 ºC). Тъй като охлаждането е със 100 – 42,2 = 57,8 ºC, въз основа на закона за запазване на енергията можем да твърдим, че като смесим трите третинки от студената вода, ще получим, че тяхната обща температура е 0 + 57,8 = 57,8 ºC. (За тези, които не са убедени в това, представяме сметката: $\dfrac{75 + 56{,}2 + 42{,}2}{3} = 57{,}8$ ºC.)

Трети въпрос. Набелязва се тенденция при делене на по-голям брой равни части на водата в единия съд крайната разлика в температурите да расте. Третият въпрос се оформя така: дали чрез разделяне на безкрайно голям брой безкрайно малки части не можем да постигнем пълно обменяне на температурите – т.е. водата с начална температура 100 ºC да се охлади до 0 ºC, а студената вода да повиши температурата си от 0 ºC до 100 ºC – първият закон на термодинамиката не забранява подобен процес. (Разбира се, както по-горе, и тук, и по-надолу ние пренебрегваме всякакви топлинни загуби при осъществяване на процесите на топлообмен!)

На този въпрос обаче можем да отговорим без всякакви пресмятания. Наистина, да допуснем, че по използваната до сега рецепта температурите на двете количества вода могат да се разменят. Да си представим, че сме разделили студената вода на n равни части, където n е едно голямо цяло число и започнем процедурата. Първата от n-те малки части студена вода след контакта с горещата ще придобие температура, много близка до 100 º, следващата – малко по-ниска и т.н. Ние допуснахме, че горещата вода ще се охлади до 0 ºC, а това означава че последните части на студената вода, които поставяме в контакт с литъра отначало гореща вода, ще се нагреят едва-едва (защото горещата вода се е охладила вече почти до 0 ºC!). Тогава, като смесим всички n части на отначало студената вода, няма как да получим смес с температура 100 º, защото температурата само на първите няколко части е близка до 100 ºC, а на последните (по-допускане) е почти 0 ºC. Следователно по този път пълна размяна на температурите е невъзможна.

Четвърти въпрос. Щом отговорът на третия въпрос е отрицателен, естествено като четвърти възниква въпросът каква минимална температура на горещата вода можем да постигнем чрез увеличаване броя на порциите, на които делим студената вода? (И, разбира се, каква максимална температура ще достигне студената вода.)

За да опростим писането, още в началото ще отчетем, че $t' = 0\,^{\circ}$ и затова в уравненията няма да я пишем, а началната температура на горещата вода ще означим с t_0 (колкото и да е числената ѝ стойност – повече числени пресмятания няма да правим). Освен това, отново за опростяване на писането, в уравненията на топлинния баланс няма да пишем c и m, които винаги се съкращават.

И така, да си представим, че сме разделили студената вода на n равни порции и започнем да осъществяваме използваната вече два пъти процедура. След като поставим първата порция в контакт с горещата вода и изчакаме да се осъществи топлообменът, в двата съда се установява температура t_1, която се определя от уравнението на топлинния баланс:

(11) $$t_0 - t_1 = \frac{1}{n} t_1 .$$

Оттук:

(12) $$t_1 = \frac{t_0}{1 + \frac{1}{n}} .$$

Следващата $\frac{1}{n}$-та част от студената вода поставяме в контакт с охладения до температура t_1 литър гореща вода, при което след топлообмена се установява температура t_2, която определяме от уравнението:

(13) $$t_1 - t_2 = \frac{1}{n} t_2 ,$$

или:

(14) $$t_2 = \frac{t_1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{t_0}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} .$$

Тенденцията е ясна – след като литъра първоначално гореща вода поставим в контакт с k-та порция от студената вода, общата им температура ще бъде:

(15) $$t_k = \frac{t_0}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k} .$$

Един математик би се заел да докаже, че ако формула (15) е валидна за някакво k, тя ще бъде валидна и за $k + 1$ и тогава, по метода на пълната математична индукция ще твърди, че тя е валидно за всяко $k \le n$. Това не е трудно, но ние няма да "издребняваме" чак до там – в случая интуицията не подвежда и направо ще приложим формулата и за последната порция студена вода, т.е. за $k = n$:

(16) $$t_n = \frac{t_0}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} .$$

Това е окончателната температура на водата, която в началото е била гореща. И сега предстои стъпката, която в училище няма как да се направи – да се използва границата:

(17) $$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \underset{n \to \infty}{=} e ,$$

където e = 2,7182... е основата на естествените логаритми. С помощта на формула (17) получаваме, че когато делим студената вода на безброй малки части, след приключване на процедурата температурата на горещата вода ще бъде:

(18) $$t_г = \frac{t_0}{e}.$$

Така горещата в началото вода е понижила температурата си с $\Delta t = t_0 - t_0/e = \frac{e-1}{e}t_0$ градуса. За да избегнем сумирането на безкрайни редове, за намиране температурата на студената в началото вода, ще се опрем на закона за запазване на енергията: щом началната й температура е била 0 ºC, след смесването на безброй многото порции, на които сме я делили, температурата й ще се повиши с толкова, с колкото се е охладила горещата вода, т.е. крайната й температура е $t_с = \frac{e-1}{e}t_0$. По такъв начин разликата в температурите сега е:

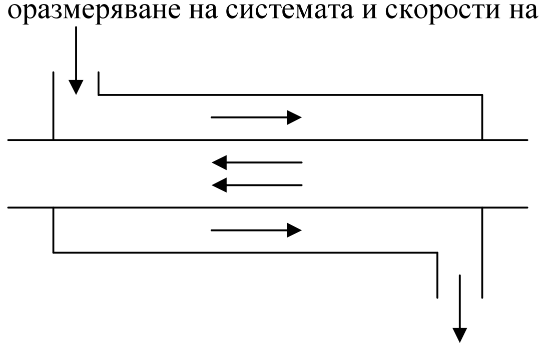
(19) $$t_с - t_г = \frac{e-2}{e}t_0.$$

Ако в тези формули заместим t_0 = 100 ºC (както приехме в началото), получаваме, че горещата вода се е охладила до 36,8 ºC, а студената се е нагряла до 63,2 ºC, т.е. – постигнали сме една температурна разлика от 26,4 ºC в посока, обратна на посоката на началната температурна разлика от 100 ºC.

Пети въпрос: А не може ли повече? Температурна разлика от 26,4 ºC е максимумът, който можем да постигнем с процедурата, която използвахме. Но от никъде не следва, че единствената възможна процедура е манипулиране с едното количество вода (в нашия случай – разделяне на части на студената вода и т.н.) и пасивно участие на другото количество. Не е ли възможно да се измисли нещо по-хитро, някаква рецепта, при която и двете начални количества вода се делят на части и между тези части в определен ред се осъществяват контакти преди да се смесят?

Отговорът на така поставения въпрос е положителен и се съдържа в цитираната по-горе книга на Маковецкий, който е публикувал тази задача преди повече от половин век (вж. Физика в школе, 3, 1956). След публикацията, читател от Дубна е показал, че температурната разлика наистина може да се направи още по-голяма. Маковецкий не привежда нито доказателството на читателя, нито посочва каква максимална разлика може да се постигне по този начин. Той се задоволява да отбележи, че за целта "трябва не само да се разделят двата литра на порции, но и топлообменът да се осъществява насрещно: да се построи от горещите порции един "влак", а от студените – друг, и да се пуснат тези два "влака" един срещу друг да осъществяват топлообмен."

На практика. Последният пример с насрещно движещите се "влакове" от малки порции студена и гореща вода плътно ни доближава до важно и широко използвано приложение: подгряването на водата в абонатните станции на топлопреносната мрежа в градовете, където има централно отопление. Съществениият елемент в абонатната станция се състои от две коаксиални тръби (фиг. 1). По по-широката, външната тръба тече горещата вода, която постъпва от ТЕЦ-а, а в противоположната посока по вътрешната тръба постъпва студената тръба, която трябва да се загрее. При подходящи оразмеряване на системата и скорости на двата потока е възможно да се осъществи



Фиг. 1.

почти пълна обмяна на температурите.

А вторият принцип? Нека сега погледнем по-общо на направеното, да го опростим максимално, без да прибягваме към каквито и да е количествени съотношения. Няма да говорим даже конкретно за вода, а за произволни тела.

И, така, имаме две тела с температури t' и t'', като $t' < t''$. Вземаме част от по-студеното тяло и осъществяваме топлинен контакт между нея и по-горещото. След топлообмена се установява някаква обща температура $t_1 < t''$. След това допираме остатъка от студеното тяло до горещото, което е вече малко охладено до температура t_1 – установява се някаква обща температура $t_2 < t_1$. Накрая връщаме отделената от студеното тяло част, чиято температура е t_1, към останалата част, имаща температура t_2. Ясно е, че след топлообмена тялото, която в началото бе по-студено, ще се окаже с някаква температура t_3, която е по-висока от температурата t_2 на тялото с по-висока начална температура.

И направеното разсъждение е вярно, независимо какви са началните температури на телата, масите им, специфичните топлинни капацитети, независимо и от това, каква част от студеното тяло сме отделили. Няма ли тук някакво противоречие с втория принцип, който забранява пренасяне на топлина от по-студено към по-топло тяло, без външни сили да извършват работа? Нали ако просто бяхме допрели двете тела, температурите им само щяха да се изравнят, а процесът – да спре?

Проследяването на отделните стъпки в описания по-горе процес показва, че при нито една от тях няма предаване на топлина от по-студено към по-топло тяло, т.е. с втория принцип нещата са наред. Работата е там обаче, че използваната формулировка на втория принцип (между впрочем, това е формулировката на Клаузиус) е за система от **две** тела. Възможността да преодолеем границата на изравнените температури се дължи на това, че в нашия случай работим със системи с **различен брой тела**: започваме със система от две тела, след това (след отделяне на част от студеното тяло) преминаваме към система от три тела, осъществяваме с тях някакви манипулации и, накрая, отново се връщаме към система от две тела.

Всъщност, допускам, че освен току що приведените доводи, по въпросите, свързани с втория принцип, може да има и други мнения. Ще се радвам, ако някой от читателите сподели мнението си по този въпрос.