Стабилност на чаша с пясък

Една класическа задача от статиката, която добре характеризира типичен за разсъжденията на физиците прийом е следната.

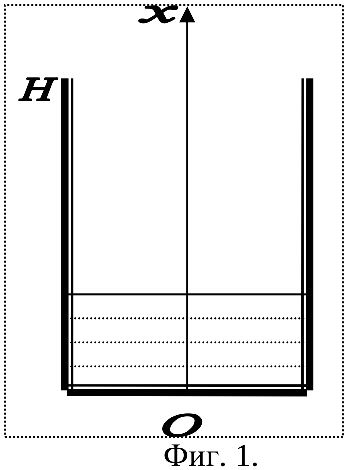
Задача. Докажете, че една поставена върху хоризонтална маса цилиндрична чаша, в която е насипан мокър пясък, е най-стабилна, когато центърът на масите на цялата система е на височината на свободната повърхност на пясъка.

Анализ и предварителни бележки

В една коректно формулирана задача не трябва да има нито излишни, нито случайно употребени думи. Затова нека първо опитаме да изясним, защо в условието става дума не например за вода, а за пясък, при това – *мокър* пясък? Причината е в това, че свободната повърхност на водата е винаги хоризонтална. По-нататък ще разглеждаме чашата като съставена от плосък кръг (дъното) и кух цилиндър, така че по същество имаме система от три тела: кръг, кух цилиндър и плътен цилиндър (съдържанието на чашата). Когато се интересуваме от стабилността на системата, трябва да си представяме, че постепенно наклоняваме равнината на подставката и да следим при какъв наклон вертикалата през центъра на масите на системата ще излезе извън опорната площ. При наклоняване на чаша с вода обаче едно от трите тела – водата, не запазва формата си, защото едната основа на водния цилиндър (тази при дъното) се накланя, но другата остава хоризонтална. Така двете основи на цилиндъра не са вече успоредни, а това измества центъра на масите на водата от оста на чашата. (По-подробно, със съответния чертеж, този проблем е разгледан в задачата за плаващата свещ[1].)

Когато запълваме чашата с мокър пясък и заглаждаме повърхността му така, че да бъде хоризонтална, поне в определени граници при наклоняване формата на цилиндъра не се променя – той си остава цилиндър с успоредни основи.

Стабилността на твърдо тяло, лежащо върху опорна площ, се определя от височината на центъра на масите на тялото над тази площ. Стабилността на чашата с пясъка е максимална, когато положението на центъра на масата й е най-ниско.



Фиг. 1.

Очевидно проблемът е едномерен – височината x на центъра на масите над опорната площ ще отчитаме спрямо вертикална ос Ox, чието начало лежи в средата

---

[1] **Попов Хр.** За плаващата свещ, обратната връзка, стабилността й и т.н. (или – докъде може да се усложнява една проста задача), Физика, 6, 2009, с. 305-310.

на дъното на чашата (фиг. 1). За решаване на задачата използваме формулата, че ако координатите на центровете на масите на една система от тела с маси m_1, m_2,... m_n и т.н. са съответно x_1, x_2,... x_n и т.н., то координатата на центъра на масите на системата е:

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots m_n}.$$

(Когато проблемът не е едномерен, подобни формули се записват и за останалите две координати y и z на центъра на масите.)

От формулата следва едно подсказвано и от физичната интуиция правило: *центърът на масите на система от две тела се намира върху отсечката, свързваща центровете на масите на телата.*

Записана за система от две тела, формула (1) придобива вида:

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}. \tag{1}$$

Този й вид позволява да изведем по-общото правило: като пресметнем разстоянията $|x - x_1|$ и $|x - x_2|$ и ги сравним, виждаме, че *общият център на масите лежи върху отсечката, свързваща центровете на масите на двете тела и е по-близо до центъра на масите на по-масивното от тях.*

Качествени разглеждания. Уместно е да използваме това правило, за да покажем първо, че разглеждана като функция на количеството пясък в чашата, височината на центъра на масите има минимум. За целта отново ще използваме нееднократно прилагания метод на екстремните стойности (или по-общо – ситуации). Разбира се, тук не може да става дума за, например, “безкрайно” количество пясък: ще разгледаме двата гранични случая, когато пясъкът едва покрива дъното на чашата и когато чашата е почти пълна, като накрая проследим поведението на общия център на масите при прехода от първото състояние към второто.

Да разгледаме празната чаша като система от две тела: кръгло дъно, чиито център на масите е в центъра му (т. O на фиг.1), и околна стена – цилиндър с височина H, чиито център на масите (от съображения за симетрия) е върху оста на цилиндъра, на височина $H/2$ над дъното. Според формулираното по-горе правило, центърът на масите на цялата празна чаша се намира върху оста на цилиндъра, на височина **по-малка** от $H/2$.

Да насипем малко пясък в чашата – толкова, че неговият център на масите да е под центъра на масите на празната чаша, и да разгледаме нова система от две тела – празната чаша и пясъка. Според същото правило, центърът на масите на тази система лежи по-ниско от центъра на масите на празната чаша, т.е. когато започнем да насипваме пясък в чашата, центърът на масите на цялата система започва да се понижава.

Този процес на понижаване на центъра на масите обаче не може да продължава непрекъснато. Наистина, да разгледаме другия граничен случай – когато чашата е пълна с пясък. Отново имаме система от две тела – празна чаша с център на масите на височина, по-малка от $H/2$, и пясъчен цилиндър с височина H, чиито център на масите е на височина точно $H/2$. Като приложим за трети път въпросното правило, стигаме до заключение, че в този случай центърът на масите е над центъра на масите на празната чаша. Това заключение води до извода, че с увеличаване масата на пясъка в чашата, след началното понижаване на височината на общия център на масите е започнало повишаването му, за да достигне той в края, при пълна чаша, равнище, по-високо от началното. Следователно наистина има някакво положение, при което височината на центъра на масите е минимална, а цялата система – най-стабилна.

Направеното разсъждение е типичен пример за **доказателство за съществуване**. То доведе до заключението, че има някакво междинно равнище на пясъка в чашата, при което системата е най-стабилна, но (както с повечето доказателства за съществуване в математиката) не казва къде е това равнище.

Възможно ли е качествените разглеждания да подскажат нещо по-конкретно относно положението на минимума? Да разгледаме за целта още веднъж ситуацията в развитие: центърът на масите на празната чаша е някъде под геометричния й център. Когато започнем да насипваме пясъка, неговото равнище започва да се издига, а центърът на масите на цялата система – да слиза надолу. В някакъв момент обаче понижаването на този център спира, след което той започва да се изкачва, като в края (при пълна чаша) достига равнище, по-високо от началното, но непременно по-ниско от равнището на пясъка. Очевидно е, че в целия този процес има един единствен момент, който можем да отличим с нещо от останалите – това е моментът, когато равнището на пясъка се изравни с равнището, на което се намира общият център на масите (от съображения за непрекъснатост такъв момент непременно съществува!). Можем да предположим, че именно това е и интересуващото ни положение, от което започва издигането центъра на масите, т.е. – че това е най-ниското му положение. Това за сега обаче е само една догадка, правилността на която може да се провери чрез решаване на задачата. (В края ще приведем разсъждението, което показва, че догадката е правилна.)

Количествено решение

Ако с m_1 и m_2 означим масите съответно на дъното и на околната стена на чашата, височините на техните центрове на масите ще бъдат съответно $x_1 = 0$ и $x_2 = H/2$ и според формула (1) центърът на масите на празната чаша ще бъде на височина:

$$x_0 = \frac{m_1.0 + m_2\frac{H}{2}}{m_1 + m_2}. \qquad (2)$$

За да изразим височината x на центъра на масите на чаша с пясък, когато дебелината на слоя пясък в нея е h, ще означим с μ масата на слой пясък с единица дебелина (“линейната плътност” на пясъка). При това положение общата маса на пясъка е μh и, отново по формула (1), височината на центъра на масите на цялата система е:

$$x(h) = \frac{m_2\frac{H}{2} + \mu h.\frac{h}{2}}{m_1 + m_2 + \mu h}, \qquad (3)$$

тъй като центърът на масите на пясъка е на височина $h/2$.

За да намерим минимума на тази функция, трябва да приравним на нула производната й по h. Така получаваме, че търсената стойност на x е решение на квадратното уравнение:

(4) $$\mu^2 h^2 + 2\mu(m_1 + m_2)h - m_2 \mu H = 0.$$

Положителният корен на това уравнение е:

(5) $$h_0 = \frac{1}{\mu}\left[\sqrt{(m_1 + m_2)^2 + m_2 \mu H} - m_1 - m_2\right].$$

Полученият израз представлява дебелината на слоя пясък, при която центърът на масите е в най-ниско положение. Ако сега заместим изразът за h_0 от (5) във формула (3), за да получим височината на това най-ниско положение, ще намерим, че:

(6) $$x_{\min} = h_0.$$

И така, условието за максимална стабилност на чашата с пясъка е: центърът на масите на цялата система да бъде на равнището на свободната повърхност на пясъка. Разбира се, във всеки конкретен случай дебелината на слоя пясък трябва да се пресмята по формула (5).

Теми за размисъл. Ако сте любител на математическата прецизност, покажете първо, че екстремумът на функцията $x(h)$ в определената от формула (5) точка h_0 е наистина минимум, т.е. – че в тази точка втората производна на функцията е положителна и второ, че други екстремуми тази функция в интервала $0 < h < H$ няма.

Коментар. Количественото решение на поставената в началото задача съдържа неудобен за училищните условия елемент – търсене минимум на функция, което изисква използване на операцията диференциране. Това по същество отвлича вниманието и усилията в посока на математиката и може да замъгли физическата същност. Затова, ако отслабим изискванията в условието, може да формулираме качествена задача, решението на която може да се разглежда като упражнение както по физика, така и по логика. Условието на задачата е:

Да се докаже, че когато пълним цилиндрична чаша с вода, височината на центъра на масите на системата чаша–вода е минимална, когато този център лежи върху свободната водна повърхност.

Тъй като сега не става дума за стабилност, не е необходимо да говорим за мокър пясък, което поражда излишни въпроси. Ясно е, че при тази формулировка се изисква само доказване правилността на приведената по-горе догадка. С риск от повторение, ще го приведем още веднъж с новата терминология (вместо пясък – вода).

За да докажем твърдението ще означим с h височината на центъра на масите на празна чаша. Да си представим, че започнем постепенно да наливаме в чашата вода. Когато свободната повърхност на водата е под равнището на h, центърът на масата на системата чаша–вода ще бъде по-ниско от h, т.е. когато започваме да пълним чашата, първоначално центърът на масата слиза надолу. С други думи в началото на наливането свободното равнище на водата се издига, а положението на общия център на масите слиза надолу. Да означим с h_0 височината, при която свободната водна повърхност се окаже на същата височина, на която е и общият център на масите. Ако сега добавим допълнителен слой вода, неговият център на масите вече ще бъде на височина, по-голяма от h_0 (тъй като долният му край е на височина h_0). А това означава, че новият център на масите на системата, след като сме добавили допълнително вода, е по-високо от h_0. С други думи, всяко доливане на вода над равнището h_0 издига общия център на масите.

С това твърдението, че минималната височина на общия център на масите се достига, когато свободната повърхност на водата се изравни с този център, е доказано.

А практически? Формула (5) дава отговор на задачата. Нейният вид обаче е до известна степен стряскащ – не, че изразът в дясната страна не може да се пресметне, но в него фигурира и една величина μ – масата на стълб пясък с единична дължина и напречно сечение, равно на отвора на чашата. Ако трябва действително да търсим количеството пясък, при което чашата е най-стабилна, ще трябва предварително практически да определим μ, а това означава:

– да напълним чашата с пясък;

– да измерим височината h на пясъчния стълб;

– да претеглим чашата два пъти – с пясъка и празна;

– да извадим от масата на пълната чаша масата на празната чаша, за да определим масата m на пясъка;

– да разделим m на h, за да получим стойността на μ.

Едва след това можем да пристъпим към прилагане на формула (5). Но тогава, щом така или иначе ще трябва да правим нещо практически, не може ли изобщо да избегнем цялата процедура, включваща пресмятането по формулата?

Отговорът на този въпрос е положителен. Щом веднъж сме доказали, че в най-стабилното положение центърът на масите е върху свободната повърхност на пясъка, за да намерим необходимото количество пясък, можем да постъпим по следния начин. Предварително трябва да изрежем от картон леко кръгче, което плътно (като тънко бутало) влиза в отвора на чашата. Освен това през дупка в центъра на кръгчето трябва да прекараме конец с възел в единия край, така че кръгчето да виси на конеца, когато държим последния за свободния му край. Триенето между кръгчето и стените на чашата трябва да е достатъчно, така че чашата с пясъка да може да виси на конеца без да пада (условие, чието изпълнение не е лесно).

За да определим кога центърът на масите е върху свободната повърхност на пясъка, ще използваме свойството, че *когато едно тяло е окачено (или подпряно) в центъра на масите, то се намира в* ***безразлично*** *равновесие.*

Тогава процедурата е следната. Насипваме в чашата определено количество пясък, затваряме го с кръгчето и провисваме "системата" на конеца. Ако сме уцелили количеството на пясъка и центърът на кръгчето се е оказал точно в центъра на масите, накъдето и да наклоним чашата, тя ще остане в наклоненото си положение – равновесието й е *безразлично* и задачата е решена.

Описаната ситуация обаче е малко вероятна. По-вероятно е центърът на кръгчето да е под или над центъра на масите. Ако количеството на пясъка е по-малко от необходимото, центърът на масите е над точката на окачване. В този случай, като провесим системата на конеца, при малко отклоняване на оста на чашата от вертикалата се появява двойка сили (тежестта на системата и опъването на конеца), която отдалечава чашата от равновесното й положение. (Чашата ще продължи да се накланя, докато свободният й ръб допре конеца.) Това показва, че системата е в *нестабилно* равновесие и ще трябва да извадим кръгчето и да досипем пясък.

Може да се окаже обаче, че в началото сме насипали повече от необходимото количество пясък и центърът на масите е слязъл под свободната повърхност на пясъка. Сега, при провесване върху конеца и отклоняване на оста от вертикалата, двойката сили се стреми да върне чашата в равновесното й положение – следователно нейното равновесие е *стабилно*. В този случай трябва да отсипем известно количество пясък.

Така чрез последователно добавяне или отнемане на пясък можем да намерим количеството, при което окачената чаша е в безразлично равновесие. Очевидно описаната процедура е сходяща, т.е. няма да ни се наложи да правим безкраен брой операции, защото количествата, които трябва да добавяме или отнемаме ще намаляват и в един момент ще минат под границата на точността на опита – тогава можем да спрем и да сметнем, че сме решили задачата.