

Един проблем пред строителите на метрото

Когато трябва да се прекарва междуградска железопътна линия, местата на гарите са определени – в близост до населените места. При строеж на метро или на крайградска жп-линия обаче трасето минава през повече или по-малко равномерно заселени райони и трябва да се решава проблемът колко близо да бъдат една до друга съседните спирки. Отнапред е ясно, че колкото по-наблизо са те, толкова по-малки разстояния ще изминават пътниците пеш, за да стигнат до тях и това ще скъсява общото времетраене на пътуването им. В същото време обаче, като отчетем интервалите от време, през които влакът спира и се ускорява между спирките и времето за престой на всяка от тях, е ясно, че колкото по-близо една до друга са те, толкова по-малка ще бъде средната скорост на метрото. Това обстоятелство удължава времето за пътуване.

При наличието на тези две противоположни тенденции строителите на метро или на крайградска железопътна линия трябва да търсят онова оптимално разстояние между съседните спирки, при което общото време за пътуване на хората да бъде минимално. За решаване на подобен проблем е необходимо да се знае преди всичко как средната скорост на влаковете зависи от броя на спирките (или - от разстоянието между тях). Отговор на този въпрос дава следната задача.

Задача. Намерете средната скорост на влак при движение между спирки, отстоящи на разстояние s една от друга, ако общото разстояние, необходимо за ускоряване и за спиране на влака преди и след станциите е s_0 , времето за престой на всяка станция – τ , а скоростта на равномерното движение на влака между станциите – v .

Анализ. За решение на задачата е необходимо да се намери общото време, необходимо на влака за изминаване на разстоянието s . То е сума от времето τ за престой на спирката, от времената t_y и t_c за ускоряване и спиране на влака, и от времето t_p за равномерно движение. За да могат да бъдат пресметнати тези величини, трябва да се въведат величините a_y и a_c ускоренията на влака съответно при тръгване и при спиране.

Решение

От известните зависимости при равнопроменливи движения намираме, че времето за ускоряване на влака след поредната спирка и разстоянието, което той изминава за това време са:

$$(1) \quad t_y = \frac{v}{a_y} \quad \text{и} \quad s_y = \frac{v^2}{2a_y}.$$

По същия начин времето и изминатият път при спиране преди следващата спирка са:

$$(2) \quad t_c = \frac{v}{a_c} \quad \text{и} \quad s_c = \frac{v^2}{2a_c}.$$

Тъй като разстоянието между спирките, изминавано със скорост v , е $s - s_0$, времето за изминаването му е:

$$(3) \quad t_p = \frac{s - s_0}{v}.$$

Като отчетем и времето τ за престой на влака на спирката, от (1), (2) и (3) за общото време на пътуване между двете спирки намираме израза:

$$(4) \quad t = \tau + t_y + t_c + t_p = \tau + \frac{v}{a_y} + \frac{v}{a_c} + \frac{s - s_0}{v}.$$

Средната скорост на движение при това положение е:

$$v_{cp} = \frac{s}{\tau + \frac{v}{a_y} + \frac{v}{a_c} + \frac{s - s_0}{v}}.$$

Отчитайки, че съгласно с (1) и (2) е валидно равенството:

$$s_0 = s_y + s_c = \frac{v^2}{2a} + \frac{v^2}{2a_c},$$

за средната скорост окончателно получаваме:

$$(5) \quad v_{cp} = \frac{v}{1 + \frac{s_0}{s} + \frac{v\tau}{s}}.$$

Вижда се, че, както трябваше да се очаква, средната скорост намалява с намаляване разстоянието s между спирките и с увеличаване на престоя τ и на пътя s_0 , пропътуван неравномерно.

Коментар 1. Интересно е, че според формула (5) средната скорост не зависи пряко нито от ускорението, което влакът има при тръгване от спирките, нито от ускорението, при спиране. Нещо повече, тези две ускорения могат да бъдат съвсем различни по големина. Формулата показва, че средната скорост зависи само от общото разстояние s_0 , изминавано с променлива скорост. Този факт е тясно свързан с обстоятелството, че при равнопроменливо (равноускорително от скорост нула или равнозакъснително до спиране) движение на даден участък, средната скорост е точно половината от максималната. Това обстоятелство бе подробно дискутирано в сборника¹ “53+15 решени физични задачи”.

2. Разбира се, когато се планира къде да бъдат станциите на метрото, трябва да се решават още много проблеми и може би този, с който се занимахме, е измежду най-простите. Това са проблеми, свързани с икономиката, с градоустройството и др.п. От средната скорост например зависи стойността на експлоатацията на метрото. Това, доколко трябва да се стремим да я увеличаваме, зависи от средната цена на времето, т.е. от производителността на труда (грубо казано – блага с каква стойност биха могли да произведат пътниците в спестеното за пътуване време). Трябва да се отчита също, че колкото по-близо една до друга са станциите, толкова по-скъпо е строителството, а това означава, че в процеса на планиране неизбежно ще се намесят съображение от рода на това, за колко години разчитат инвеститорите, че ще им се възвърнат инвестициите и т.н. Други проблеми възникват от факта, че в един град обикновено има места, в които е невъзможно да се строи метростанция (напр. в археологични и исторически резервати) и т.н., и т.н.

¹ Попов Хр. 53 + 15 решени физични задачи, С., Просвета, 2000.