Общото между електричен котлон и египетските пирамиди

В плочите на четиристепенните електрични котлони са монтирани два нагревателни елемента (резистори) с различни съпротивления, които означаваме съответно с R' и R'' (нека $R' < R''$). С $P_1 < P_2 < P_3 < P_3$ пък означаваме мощностите на плочата в четирите положения на превключвателя. Тъй като в четирите случая на котлона се подава едно и също напрежение U, мощността във всеки от тях пресмятаме по формулата $P = \dfrac{U^2}{R}$, според която мощността е обратно пропорционална на съпротивлението. Като отчетем, че при последователно свързване на резистори общото им съпротивление расте, а при успоредно – намалява, лесно съобразяваме, че в положение на превключвателя:

– “1” двата резистора са свързани последователно, общото им съпротивление е $R_1 = R' + R''$, а мощността – $P_1 = \dfrac{U^2}{R'+R''}$;

– “2” напрежение се подава само на резистора с по-голямото съпротивление и мощността е $P_2 = \dfrac{U^2}{R''}$;

– “3” напрежение се подава само на резистора с по-малкото съпротивление и мощността е $P_3 = \dfrac{U^2}{R'}$;

– “4” двата резистора са свързани успоредно, общото им съпротивление е $\dfrac{R'R''}{R'+R''}$, а мощността – съответно $P_4 = \dfrac{U^2}{R'R''}(R'+R'')$.

Пред един конструктор на котлони обикновено стои задачата да подбере подходящи съпротивления на двата резистора, за да получи отнапред зададени стойности на мощностите.

Задача. Покажете, че ако минималната и максималната мощност на котлона не удовлетворяват съотношението $4P_1 < P_4$, задачата за подбор на резисторите R' и R'' няма решение[1].

Директно решение. Задачата решаваме, като използваме изразите за P_1 и P_4 в качеството на система от две уравнения за неизвестните R' и R'':

$$P_1 = \frac{U^2}{R'+R''}$$

$$P_4 = \frac{U^2}{R'R''}(R'+R'').$$

Системата се решава по-лесно, ако двете уравнения се умножат, а първото се реши спрямо $R' + R''$. Така тя придобива вида:

$$R'+R'' = \frac{U^2}{P_1}$$

$$R'R'' = \frac{U^4}{P_1P_4}.$$

Ако повдигнем първото от тези равенства в квадрат и извадим от него умноженото с 4 второ равенство, след кореннуване получаваме израз за разликата $R' - R''$, който, събран

[1] Задачата е вариант на публикуваната в сп. Физика (2007 г., кн. 4, с. 209).

с уравнението за $R' + R''$ дава веднага формула за R'. След това намираме и R''. Така окончателно получаваме:

(1) $$R^{','} = \frac{U^2}{2P_1}\left(1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{P_1}{P_4}}\right).$$

Вижда се, че наистина решение съществува само, когато е изпълнено неравенството $4P_1 < P_4$ – в противен случай корените са комплексни числа.

Математическо решение. Задачата може да се реши "математически", като физиката се включи едва в края.

Излизаме от неравенството:

$$(R' - R'')^2 > 0 .$$

Ако към двете му страни добавим $4R'R''$, то придобива вида:

$$(R' + R'')^2 > 4R'R'' .$$

Това неравенство може да се препише по следния начин:

$$R' + R'' > 4\frac{R'R''}{R' + R''} .$$

В лявата страна фигурира еквивалентното съпротивление R_1 на двата *последователно* свързани резистора, а в дясната страна – учетвореното еквивалентно съпротивление R_4 при *успоредното* им свързване[2]. Щом $R_1 > 4R_4$, заради обратната пропорционалност между съпротивлението и мощността, следва отново да заключим, че задачата има решение само, ако учетворената мощност при последователно свързване е по-малка от мощността при успоредно свързване на резисторите.

Предполагам, че до този начин за решаване може да стигне само човек, който е решил задачата предварително по друг начин.

Да влезем отново в ролята на конструктор на котлони и опитаме да решим следната допълнителна задача.

Задача. Изследвайте възможността да подберете съпротивленията на двата нагревателни елемента така, че мощността при четирите степени на котлона да нараства равномерно – напр. да образуват аритметична прогресия (примерно P_1 = 100 W, P_2 = 300 W, P_3 = 500 W, P_4 = 700 W).

Решението включва пресмятане на разликите $P_2 – P_1$, $P_3 – P_2$ и $P_4 – P_3$ и търсене на такива стойности на R' и R'', при които те са равни. Затова с помощта на изразите за отделните мощности пресмятаме:

$$P_2 - P_1 = \frac{U^2 R'}{R''(R' + R'')}; \qquad P_3 - P_2 = \frac{U^2}{R'R''}(R'' - R'); \qquad P_4 - P_3 = \frac{U^2}{R''}.$$

Чрез приравняване на десните страни на тези равенства установяваме, че:

$$P_3 - P_2 = P_2 - P_1, \quad \text{ако } R'' = \sqrt{2}R'$$
$$P_4 - P_3 = P_3 - P_2, \quad \text{ако } R'' = 2R'.$$

Вижда се, че така поставената задача няма решение – двете условия за R' и R'' са несъвместими, т.е. съпротивленията на нагревателните елементи не могат да бъдат подбрани така, че четирите мощности да образуват аритметична прогресия.

Какво е общото между котлона и египетските пирамиди?

Интересно е обаче, че при определено съотношение между R' и R'' мощностите могат да образуват геометрична прогресия. Наистина, отново чрез изразите за мощностите намираме:

[2] Между другото, неравенството демонстрира един универсален факт: съпротивлението на два последователно свързани проводника е поне четири пъти по-голямо от съпротивлението им при успоредно свързване.

(2) $$\frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{R'}{R''}, \qquad \frac{P_3}{P_2} = \frac{R''}{R'} \qquad \text{и} \qquad \frac{P_4}{P_3} = 1 + \frac{R'}{R''}.$$

Тъй като за сега единственото ограничение върху съпротивленията се изразява с неравенството $R' < R''$, от (2) следва, че отношенията $\frac{P_2}{P_1} = \frac{P_4}{P_3} = 1 + \frac{R'}{R''}$ не могат да надминават 2, докато стойността на отношението P_3/P_2 може да бъде произволно число, по-голямо от единица. Трите отношения ще бъдат равни, ако R' и R'' удовлетворяват равенството:

$$1 + \frac{R'}{R''} = \frac{R''}{R'},$$

т.е., ако отношението $\lambda = \frac{R'}{R''} < 1$ е решение на уравнението:

$$\lambda^2 + \lambda - 1 = 0.$$

Положителният корен на това уравнение е $\lambda = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Следователно, ако:

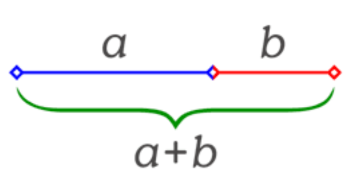
(3) $$R' = \frac{\sqrt{5}-1}{2} R'' \approx 0{,}62 R'',$$

тогава четирите мощности наистина образуват геометрична прогресия с показател $\frac{R''}{R'} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}62$, т.е.:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{P_3}{P_2} = \frac{P_4}{P_3} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{R''}{R'}.$$

Всеки, който е чел книжки със занимателни факти от математиката, ще разпознае в дробта $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ т.нар. "златно сечение". За тези, които не си го спомнят, ще припомним написаното в Уикипедия:

"**Златно сечение** (известно още като **златна пропорция**, **златен коефициент** или **божествена пропорция**) е ирационално число в математиката, което изразява отношение на части, за които по-малката част се отнася към по-голямата, така както по-голямата към цялото. То се отбелязва с гръцката буква φ и има стойност приблизително равна на 1,618...



$$\varphi = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}.$$

Златното сечение е не само математическо понятие, но е символ за красота, хармония и съвършенство в изкуството, науката и природата. Терминът "златно сечение" е въведен от Леонардо да Винчи като пропорция за "идеалното човешко тяло". Той е бил познат на египтяните и древните гърци още в античността. Представата за хармония и отношение е в основата на философските идеи на Питагор. Египетските пирамиди и Партенонът са пример за използването на пропорцията φ в архитектурата."

Отново според Уикипедия означението на златното сечение с φ идва от началната буква в името на древногръцкия скулптор Фидий.

И така, на въпроса: общото между котлона и египетските пирамиди е в това, че за да конструираме котлон, чиито четири мощности образуват геометрична прогресия, отношението между съпротивленията на двата нагреватели трябва да бъде същото, което древноегипетските архитекти са използвали при построяването на пирамидите – златното сечение.

Каква обаче е връзката на идеалните пропорции между частите на човешкото тяло и мощностите на различните степени на котлоните, е въпрос, върху който предлагаме да помисли читателят.