Съгласуване съпротивленията на консуматор и източник

Съществуват интересни физични задачи, свързани с търсене на минимуми и максимуми, които обаче в училище не могат да бъдат решени поради факта, че учениците не познават операцията диференциране. Има обаче и немалко задачи от този тип, които могат да се решат с елементарни средства. Класическа измежду тях е задачата за съгласуване съпротивленията на консуматор и източник на електроенергия. Освен с практическото си значение, тя е интересна и с това, че решението й не изисква нищо повече от познаване на формулата на мощност на тока (7. клас) и на закона на Ом за цялата верига (9. клас). Интересна е още и с това, че и при нея може да се приложи методът на екстремните стойности.

Задача. Консуматор на електроенергия със съпротивление R се захранва от източник с постоянно ЕДН $\mathcal{E}$ и вътрешно съпротивление r. При каква стойност на R отделената в консуматора мощност ще бъде максимална?

Качествен анализ. Първо ще докажем, че наистина, разглеждана като функция на R, отделената в консуматора мощност P има максимум. За целта прилагаме метода на екстремните стойности (в случая екстремни за R са стойностите 0 и ∞).

Ако означим тока през консуматора с I, отделената в него мощност се описва с формулата:

(1) $$P = RI^2.$$

Тъй като токът във веригата е ограничен от вътрешното съпротивление на източника (т.е. – не може да расте неограничено), от (1) се вижда, че при $R = 0$ (късо съединение между полюсите на източника), то и $P = 0$, т.е. преобразуваната в консуматора енергия е нула.

Случаят $R = \infty$ е по-сложен и ще го третираме по два начина – един по-груб (но непълен) и втори – по-пълен. Грубото разсъждение звучи по следния начин: $R = \infty$ означава отворена верига – ток не тече нито през източника, нито през консуматора, така че по формула (1) мощността отново е нула.

По-пълното разсъждение е предназначено за онези, които са учили висша математика и помнят, че произведението от две величини, едната (R) от които клони към безкрайност, а другата (I) – към нула, изобщо казано, не е определено – то може да бъде произволно число, включително нула и безкрайност. За щастие, нашият случай е твърде прост – като използваме закона на Ом за цялата верига:

(2) $$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$$

и заместим израза за тока във формула (1), получаваме:

(3) $$P = \frac{R\mathcal{E}^2}{(R+r)^2} = \frac{\mathcal{E}^2}{R\left(1+\frac{r}{R}\right)^2}.$$

Оттук вече ясно се вижда, че при $R \to \infty$, то и $P \to 0$.

И така: и при $R \to 0$, и при $R \to \infty$, отдаваната на консуматора мощност клони към нула. Това е достатъчно основание, за да твърдим, че при някаква крайна стойност на R между 0 и ∞ мощността е максимална.

Ние бихме могли да отидем и по-нататък, като опитаме с другия често използван метод за качествен анализ – метода на размерностите, да предскажем при каква стойност на R е максимумът. В условието са дадени две величини – съпротивлението r и ЕДН $\mathcal{E}$ на източника, а се търси величина с размерност на съпротивление. Тъй като всяка комбинация от двете, т.е. от r и от $\mathcal{E}$, би имала размерност, различна от размерността на съпротивление, следва да заключим, че търсеното съпротивление на консуматора може да зависи само от вътрешното съпротивление на източника, т.е. отговорът би трябвало да бъде от вида $R = kr$. Методът на размерностите обаче не може да каже колко точно е коефициентът на пропорционалност k. Разбира се, много странно би било, ако k се окаже от порядъка на 1000 или на 0,001 – подобни числа биха били физически необясними, необосновани, но това очевидно не са съображения с доказателствена сила.

Ето защо, по-нататък следва проблемът да се разглежда вече на количествено равнище.

Количествено решение. На това място настъпва неудобният момент, защото вместо да диференцираме формула (3) по R и да приравним производната към нула, трябва да прилагаме трикове, които в очите на ученика изглеждат нелогични. Но, както се казва, от двете злини (да използваме неизучен математичен апарат или да правим необосновани ходове) избираме ... единствено възможната.

Като умножим числителя и знаменателя на формула (3) с $4r$, изразът за отдадената на консуматора мощност придобива вида:

$$P = \frac{4rR\mathcal{E}^2}{4r(R+r)^2}\,.$$

(Тъкмо тук е неудобството – как сме се сетили[1] да умножаваме тъкмо с $4r$?) След това произведението $4Rr$ представяме като разлика от пълни квадрати:

$$4rR = (R+r)^2 - (R-r)^2\,.$$

Като заместим този израз за $4Rr$ във формулата за мощността, получаваме:

$$P = \frac{\mathcal{E}^2}{4r}\left[1 - \frac{(R-r)^2}{(R+r)^2}\right].$$

От него вече ясно се вижда, че разглеждана като функция от съпротивлението R на консуматора, отделената в него мощност е максимална, когато съпротивленията на източника и на консуматора са равни. Действително, само в този случай вторият член от правите скоби, който сам по себе си не е отрицателен, а се изважда от единицата, е нула. (Това означава, че стойността на коефициента k, който въведохме при прилагане на метода на размерностите, е всъщност $k = 1$.)

И така, максималната мощност, която източникът може да отдава на външен консуматор, е:

$$P_{\text{max.}} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r}\,. \qquad (4)$$

Коментар. Интересен е въпросът за коефициента на полезно действие (КПД) на нашата верига. В случая той се определя като отношение на мощността RI^2, отдадена на консуматора ("полезната" мощност), към пълната отдадена от източника мощност ($RI^2 + rI^2$). (Изразът rI^2 описва мощността, отделена в самия източник във вид на Джаулева топлина.) От тези изрази следва, че КПД е равен на:

---

[1] Така поставен, въпросът ме подсеща за проф. Ярослав Тагамлицки, който се отличаваше с нестандартното си чувство за хумор, и който навремето четеше диференциално и интегрално смятане както на математици, така и на физици. При доказателствата на различни твърдения той често прилагаше подобни трикове и на въпроси като горния винаги отговаряше с усмивка: "Драги студенти, умен човек съм, сетил съм се!".

(5) $$\eta = \frac{R}{R + r}\,.$$

Като функция от съпротивлението на консуматора той расте монотонно от $\eta = 0$ (при $R = 0$), до $\eta = 1$ (при $R = \infty$). В случая, когато отдаваната на консуматора мощност е максимална ($R = r$), КПД е $\eta = 0{,}5$. С други думи, когато извличаме от източника максимална мощност, това не е най-изгодния от гледна точка на КПД случай.

И така, когато искаме да извлечем максимална мощност от един източник, стойността на общото съпротивление на свързаните към полюсите му консуматори трябва да подберем близка до вътрешното съпротивление на източника. (Това инженерите наричат съгласуване на съпротивленията на товара и източника.) Ако обаче ни интересува не толкова извлечената мощност, т.е. разходът на електроенергия не е от решаващо значение (какъвто обикновено е случаят при маломощни консуматори), за даден консуматор трябва да подбираме източник с колкото е възможно по-малко вътрешно съпротивление – това осигурява висока стойност на КПД.