Още една двупараметрична задача

Калориметричните задачи обикновено не са сложни – както по отношение на масите на участващите в топлообмен тела, така и по отношение на температурите им връзките са линейни и това спестява затруднения поне от математическо естество. Известно усложнение се появява от възможността за фазови преходи, защото в този случай в уравнението на топлинния баланс се появяват членове, отчитащи съответните скрити топлини (на топене, на кипене и т.н.). Когато задачата е конкретна, със зададени числени стойности на известните величини, дори и това усложнение не е съществено. Ако обаче разгледаме ситуацията по-общо, стигаме до една двупараметрична задача, подобна на друга, която вече бе разгледана (вж. “Перелет–недолет”).

Нека разгледаме следната задача:

Задача: Парче лед с маса m_1 и температура t_1 е пуснато в топлоизолиран съд с вода с маса m_2 и температура t_2. Определете крайното състояние на системата. Приемете, че специфичните топлинни капацитети на водата и леда са еднакви и равни на c, независимо от температурата. Специфичната топлина на топене на леда е λ.

Качествен анализ: Елементарният анализ на ситуацията показва, че са възможни три крайни състояния на системата (три *сценария*):

– когато масата на леда не е много голяма спрямо масата на водата, а температурата му – не много под 0 ºC, крайното състояние ще бъде вода с маса $m_1 + m_2$;

– при определено съотношение между масите и температурите е възможно част от леда да се е стопила, или част от водата да е замръзнала, така че в крайното състояние общата температура на системата е 0 ºC;

– при голяма маса на леда и достатъчно ниска температура, крайното състояние ще бъде лед с маса $m_1 + m_2$ при някаква температура под 0 ºC (как голямо парче лед ще плава в малко количество вода е въпрос технически, който все пак не е нерешим).

Вижда се, че задачата наистина прилича на цитираната по-горе – и преди възможните крайни състояния на системата бяха три (“недолет”, “перелет” и поразяване на целта). В задачата за снаряда като фиксирани смятахме височината на кулата и разстоянието ѝ до оръдието, а търсехме в коя област лежи точката с координати α (началния ъгъл) и v (началната скорост), така че снарядът да порази кулата. Тук въпросът с избора на това, коя величина да разглеждаме като фиксиран параметър и коя – като променлива, няма толкова ясен отговор. Строго погледнато, изправени сме пред една четирипараметрична ситуация. Ако можехме да начертаем координатна система в четиримерното пространство с оси, по които да нанасяме стойностите на m_1, t_1, m_2 и t_2, трите възможни крайни състояния на системата щяха да лежат в различни области на това пространство. Тъй като няма как да изобразим такава координатна система, можем да правим различен избор, като смятаме два от четирите параметъра фиксирани и изследваме кога се реализират различните състояния в зависимост от стойностите на останалите два. (Това е еквивалентно на проектиране на въпросните области от четиримерното пространство върху различни координатни равнини.)

Количествено решение: Това решение трябва да отговори на въпроса какво означава “не много голяма маса на леда”, “достатъчно ниска температура” и др.п., които използвахме при качествения анализ. Ще се занимаем само с част от тези въпроси: в духа на казаното по-горе, като фиксирани ще разглеждаме началните температури на леда на водата и ще търсим при какви стойности на масите m_1 и m_2 кой сценарий се реализира. За да избегнем работата с отрицателни температури (не, че това е кой знае какво усложнение), с T_1 и T_2 ще означим началните абсолютни температури съответно на леда и водата, а с $T_0 = 273$ K – абсолютната температура на топене на леда.

I сценарий: Разтапя се всичкият лед и се установява крайна температура $T > T_0$. Уравнението на топлинния баланс в случая изразява, че количеството топлина $cm_2(T_2 - T)$, отдадено от водата при охлаждането ѝ от температура T_2 до температура T, е равно на количеството топлина, необходимо за повишаване температурата на леда от T_1 до T_0, за стапянето му, и за затопляне на получената вода до температура T:

(1) $$cm_2(T_2 - T) = cm_1(T_0 - T_1) + m_1\lambda + cm_1(T - T_0)\,.$$

Удобно е да въведем безразмерния параметър $\frac{\lambda}{T_0 c} = \Lambda$. Като вземем предвид табличните стойности за λ, c и T_0, лесно пресмятаме, че $\Lambda \approx 0{,}31$. С негова помощ уравнението на топлинния баланс приема вида:

(2) $$m_2(T_2 - T) = m_1(T_0 - T_1) + \Lambda m_1 T_0 + m_1(T - T_0)\,.$$

Определената оттук крайна температура се изразява с формулата:

(3) $$T = \frac{m_2T_2 + m_1T_1 - \Lambda m_1 T_0}{m_1 + m_2} > T_0\,.$$

Последното неравенство показва, че крайното състояние съдържа само течна вода. От него получаваме, че масата на леда трябва да удовлетворява неравенството:

(4) $$m_1 < \frac{T_2 - T_0}{(1+\Lambda)T_0 - T_1} m_2\,.$$

За отбелязване е фактът, че неравенствата $T_1 < T_0 < T_2$ гарантират, че дробта в дясната страна на (4) има положителна стойност. Очевидно графиката на (4) представлява права линия през началото на координатната система с оси (Om_2, Om_1) с положителен ъглов коефициент. Неравенство (4) показва, че за да се разтопи целият лед, масата му не трябва да надминава стойността $\frac{T_2 - T_0}{(1+\Lambda)T_0 - T_1} m_2$.

II сценарий: Когато крайното състояние е смес от лед и вода при температура T_0 са възможни два случая.

1. Разтапя се само част от леда с маса $m' < m_1$. В този случай отдаденото от водата количество топлина $cm_2(T_2 - T_0)$ е равно на количеството топлина, необходимо за затопляне на леда до температура T_0 и за разтапяне на част от него. Ето защо в този случай уравнението на топлинния баланс има вид:

(5) $$cm_2(T_2 - T_0) = cm_1(T_0 - T_1) + \lambda m'\,,$$

или, като въведем отново безразмерния параметър $\frac{\lambda}{T_0 c} = \Lambda$:

$$m_2(T_2 - T_0) = m_1(T_0 - T_1) + \Lambda m' T_0\,.$$

Оттук за масата на разтопения лед намираме израза:

(6) $$m' = \frac{1}{\Lambda T_0}\left[m_2(T_2 - T_0) - m_1(T_0 - T_1)\right].$$

Изискването $m' > 0$ налага масата на леда да не надминава:

(7) $$m_1 < \frac{T_2 - T_0}{T_0 - T_1} m_2\,.$$

В същото време изискването $m' < m_1$ води до неравенството:

(8) $$m_1 > \frac{T_2 - T_0}{(1+\Lambda)T_0 - T_1} m_2\,,$$

което е обратното на (4), т.е. масата на леда трябва да е повече от онази, при която се стапя всичкият лед.

2. До топене на лед не се стига, а част от водата с маса $m'' < m_2$ замръзва. В този случай отдаденото от водата количество топлина при охлаждането й до температура T_0, плюс количеството топлина, отделена при замръзване на вода с маса m'' ($\lambda m''$) е равно на количеството топлина, необходима за повишаване температурата на лед с маса m_1 от T_1 до T_0, т.е. в случая уравнението на топлинния баланс има вида:

(9) $$cm_1(T_0 - T_1) = cm_2(T_2 - T_0) + \lambda m''.$$

Като въведем отново безразмерния параметър Λ, за масата на замръзналата вода намираме израза:

(10) $$m'' = \frac{1}{\Lambda T_0}\left[m_1(T_0 - T_1) - m_2(T_2 - T_0)\right].$$

Сега изискването $m'' > 0$ води до неравенство, обратно на (7):

(11) $$m_1 > \frac{T_2 - T_0}{T_0 - T_1} m_2,$$

а изискването $m'' < m_2$ – до неравенството:

(12) $$m_1 < \frac{T_2 - (1-\Lambda)T_0}{T_0 - T_1} m_2.$$

III сценарий: Замръзва всичката вода и се установява крайна температура T. В този случай сумата от количеството топлина, отделена от водата при охлаждането й до T и количеството топлина, отделено при замръзването й е равна на количеството топлина, необходимо за повишаване температурата на леда до крайната температура T. Уравнението на топлинния баланс има вид:

(13) $$cm_2(T_2 - T) + \lambda m_2 = cm_1(T - T_1)$$

и крайната температура се определя от равенството:

(14) $$T = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2 + \Lambda m_2 T_0}{m_1 + m_2}.$$

Условието $T < T_0$ води до следното неравенство, което трябва да удовлетворяват масите:

(15) $$m_1 > \frac{T_2 - (1-\Lambda)T_0}{T_0 - T_1} m_2.$$

От сравняване на неравенствата (4), (7), (11), (12) и (15) се вижда, че целият първи квадрант на координатната система с оси (Om_2, Om_1) се дели на четири области от правите с уравнения:

(16а) $$m_1 = \frac{T_2 - T_0}{(1+\Lambda)T_0 - T_1} m_2$$

(16б) $$m_1 = \frac{T_2 - T_0}{T_0 - T_1} m_2$$

(16в) $$m_1 = \frac{T_2 - (1-\Lambda)T_0}{T_0 - T_1} m_2.$$

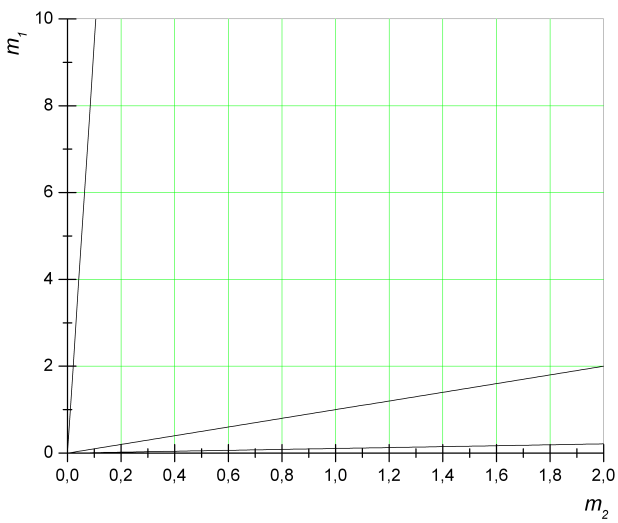
Лесно се проверява, че и трите ъглови коефициента са положителни, като най-малък е този на правата с уравнение (16а), а най-голям – на правата с уравнение (16в). При това положение от неравенствата (4), (7), (11), (12) и (15) следва, че когато при фиксирана маса m_2 на водата, масата на леда m_1 е:

– **под** правата (16а), крайното състояние е вода с температура над T_0;

– **между** правите (16а) и (16в) в крайното състояние има лед и вода при температура T_0, като под правата (16б) част от леда е останала неразтопена, а над нея – част от водата е замръзнала;

– **над** правата (16в), крайното състояние е лед с температура под T_0.

На фигурата са начертани графиките на правите (16) при температура на леда $t_1 = -10$ ºC ($T_1 = 263$ K) и температура на водата $t_2 = +10$ ºC ($T_2 = 283$ K). По двете оси на координатната система масите са нанесени в условни единици.



Фактът, че най-полегатата и най-стръмната прави са много близо до съответните координатни оси показва, че в огромното болшинство на случаи за отношението $\dfrac{m_1}{m_2}$, в крайното състояние на системата ще присъства и лед, и вода. Този факт, разбира се, се дължи на относително голямата скрита топлина на топене на леда (респ. на замръзване на водата).

Теми за размисъл. Направените дотук разглеждания не изчерпват проблема за крайното състояние на системата вода–лед. Да припомним, че в началото на количественото решение се ограничихме да търсим отговор само на въпросите какво означава малка маса и голяма маса, а температурите смятахме фиксирани. По подобен начин може да се направят още два вида разглеждания:

– При фиксирани маси на водата и леда да се търсят областите в равнината (T_1, T_2), за които се реализира всеки от трите сценария. Тъй като уравнението на топлинния баланс е линейно и по отношение на температурите, разглежданията наподобяват вече проведените.

– При фиксирани маса и температура на водата да се търсят онези стойности за масата и температурата на леда, при които се реализира всеки от трите сценария. (Или обратно – при фиксирани (m_1, T_1) да се изследва зависимостта на крайното състояние от (m_2, T_2)). Този случай е по-сложен, защото уравнението на топлинния баланс (напр. (1)) вече не е линейно – то съдържа произведение m_1T_1 от неизвестните величини.

(Останалите комбинации от по два от четирите параметъра не са интересни от физична гледна точка.)

Разгледайте самостоятелно тези два случая или ги предоставете на ученици, които биха се заинтересували от тяхното решение.