Образуване на планета

В обръщението към читателя казах, че разглежданите проблеми рядко излизат извън границите на изучавания до 10. клас общообразователен минимум и не изискват математически умения, надхвърлящи равнището на средното училище. Има обаче една класическа задача, за която ще направя изключение – задачата за формиране на планета. Обстоятелството, което я поставя извън кръга на допустимите, е необходимостта да се използва операцията интегриране. Проблемът обаче е толкова интересен, че си заслужава изключението.

Задача. Планета се образува от гравитационното свиване на студен прахов облак. Да се оцени при какъв радиус на планетата освободената при свиването гравитационна енергия ще бъде достатъчна за разтапяне на веществото на планетата.

Предварителни бележки. Може би сте забелязали, че като автор съм особено пристрастен към темата за енергия. Нерядко трудностите при прилагане на енергетичния подход за решаване на задачи се дължат на недостатъчното изясняване на това, кои тела причисляваме към една система, кои сили са вътрешни и кои – външни за системата и т.н. Ето защо при решаването на не една задача съм се връщал към основите (т.е. – към определението за енергия). Тъй като въпросът е съществен и за настоящата задача, ще се спра отново на него. (Тези предварителни бележки са предназначени само за читателите, които до тук не са попадали на подобно разглеждане.)

По определение, енергия W на една система се нарича такава функция на състоянието на системата, чието нарастване е равно на работата A на **външните** сили над системата:

$$\Delta W = W_2 - W_1 = A.$$

Когато разглеждаме **статични** системи, външните и вътрешните сили, действащи на всяка част от системата, се уравновесяват, т.е имат равни големини и противоположни посока. Тогава, при преход от едно състояние в друго, работата на вътрешните сили ще бъде равна по големина, но с обратен знак на работата на външните. Затова, ако сменим означенията и с A означим работата не на външните, а на вътрешните сили, определението за енергия ще добие вида:

(1)
$$W_1 - W_2 = A.$$

Подчертавам: тук вече A е работата на **вътрешните** сили! От (1) следва например, че когато работата на вътрешните сили е положителна, енергията на системата намалява.

Обикновено приемаме, че ако системата е разрушена, т.е. когато частите ѝ са отнесени в безкрайност и не взаимодействат, тогава и енергията на системата е нула. Ако означим енергията на началното състояние не с W_1, а просто с W, а крайното състояние е разрушена система, т.е. има енергия $W_2 = 0$, от (1) получаваме:

(2)
$$W = A$$

– равенство, което трябва да четем така: *енергията на една система е равна на работата на* ***вътрешните*** *сили при разрушаване на системата.*

Забележете, че в това определение използваме съюза “при”, а не “за”. Това не е случайно – вътрешните сили може да са такива, че не предизвикват преместване на частите на системата до безкрайност, а препятстват подобно преместване – такъв е случаят с гравитационните сили, например. В такива случаи трябва да си представяме, че разрушаването се осъществява от външните сили, които преодоляват вътрешните (но винаги оставайки почти равни по големина с тях).

Анализ на задачата. Всяка система от свързани с гравитационни сили тела притежава определена гравитационна енергия. Един сферичен прахов облак също притежава такава енергия. Когато под действие на гравитационното привличане облакът започне да се свива, гравитационната сила, действаща на всяка прахова частица, извършва положителна работа, защото движението на частицата е по посока на силата. А щом работата на вътрешните сили е положителна, от (1) следва, че гравитационната енергия на облака при свиването му намалява.

Какво става с освободената енергия? Ако пренебрегнем изпускането както на гравитационни вълни, така и на топлинно лъчение, тази енергия отива за загряване на веществото. За да пресметнем колко енергия се освобождава при свиване на облака от някакъв начален радиус R_0 до краен радиус R, трябва да знаем как гравитационната енергия на облака зависи от неговия радиус. И тъкмо тук е проблемът, защото изводът на съответната формула не е елементарен.

Спомагателна задача. И така, спомагателната задача, която трябва да решим, е да намерим израз за гравитационната енергия на хомогенно кълбо с определена маса и даден радиус.

Един палиативен изход, за чиаттелите, които още имат спомени от ученото в университета, е да използваме аналогията между законите на Кулон и Нютон:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2} \qquad \text{и} \qquad F = G\frac{mM}{r^2}\ .$$

Тази аналогия позволява получените в електростатиката резултати да преформулираме като резултати за гравитационните взаимодействия, като вместо заряди пишем маси, а вместо коефициента $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ – гравитационната константа *G*. Има обаче още една съществена разлика: тъй като едноименните заряди се отблъскват, а едноименните маси се привличат (то разноименни маси въобще няма), във всички формули, в които участват гравитационни потенциали и енергии знаците ще се бъдат обратни на тези в съответните формули от електростатиката.

В студентските семинари по електродинамика се извежда формулата за енергията на хомогенно заредено със заряд Q кълбо с радиус R_0: $W = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R_0}$. В съответствие с току що казаното, можем да запишем, че гравитационната енергия на хомогенно кълбо с маса M и радиус R_0 се описва с формулата $W = -G\frac{3}{5}\frac{M^2}{R_0}$.

Тъй като едва ли някой помни формулата за енергия на заредено кълбо, ще предложим и един извод, за разбиране на който се изисква обаче умение за елементарно интегриране.

Нека си представим, че разглеждаме хомогенно кълбо с радиус r и плътност ρ. Неговата маса е $M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3\rho$. Да разгледаме един тънък сферичен слой при повърхността на сферата с маса Δm. Всяка негова частица се намира на разстояние r от центъра на кълбото, така че общата гравитационна сила, която привлича слоя към този център, е $dF = G\frac{M\Delta m}{r^2}$. Да си представим, че слоят започне да се раздува, да изтънява, като радиусът му клони към безкрайност. При едно нарастване на радиуса на слоя с dr гравитационната сила ще извърши работа $d^2A = -dF.dr$ (знакът е минус, защото посоките на силата и на преместването са противоположни). Цялата работа на гравитационните сили при отнасяне на слоя в безкрайност ще получим чрез интегриране по r от r до безкрайност, като помним, че при това M и Δm остават постоянни:

(3) $$dA = -\int_r^\infty dF.dr = -GM\Delta m\int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = -G\frac{M\Delta m}{r}\,.$$[1]

---

[1] Като разделим този израз с "пробната" маса Δm, получаваме формулата $V(r) = -G\frac{M}{r}$, описваща гравитационния потенциал V на разстояние r от материална точка с маса M (аналогът на формулата $\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ за Кулоновия потенциал), която използвахме при решаване на някои задачи.

За да пресметнем гравитационната енергия на хомогенно кълбо с радиус R и маса M, трябва да пресметнем общата работа на гравитационните сили при разрушаване на кълбото, т.е. – да сумираме всички изрази от типа (3), които съответстват на всички тънки сферични слоеве, на които можем да разделим кълбото. С други думи, трябва да интегрираме(3) от нула до R, като при това държим сметка, че масата на сферичен слой с дебелина dr е $\Delta m = 4\pi r^2 \rho dr$, където с ρ е означена плътността на кълбото. Така получаваме:

$$W = A = \int_0^R dA = -G\int_0^R \frac{M\Delta m}{r} = -G\int_0^R \left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho\right)\left(4\pi r^2 \rho\right)\frac{dr}{r} = -G\left(\frac{4}{3}\pi R^3 \rho\right)^2 \frac{3}{5}\frac{1}{R} = -\frac{3}{5}G\frac{M^2}{R},$$

т.е. отново формулата, която по-горе написахме въз основа на аналогията с електростатиката.

И така, гравитационната енергия на кълбо с маса M и радиус R е:

(4) $$W = -\frac{3}{5}G\frac{M^2}{R}.$$

Решение. Да се върнем сега към нашата задача. В началото праховият облак има начален радиус R_0, след което се свива и се образува планета с радиус R. Освободената при това гравитационна енергия е:

(5) $$Q = W_1 - W_2 = \frac{3}{5}GM^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}\right).$$

Като отчетем, че радиусът на облака със сигурност е много по-голям от радиуса на планетата, вторият член в скобите може да се пренебрегне спрямо първия, така че:

(6) $$Q = \frac{3}{5}G\frac{M^2}{R}.$$

Нека сега с c означим специфичния топлинен капацитет на породите, които изграждат например Земята, а с ΔT – повишението на температурата, което би предизвикало тяхното разтопяване. Количеството топлина, необходимо за това, е $Q = cM\Delta T$. Като приравним този израз на дясната страна на (6), намираме:

$$\frac{3}{5}G\frac{M}{R} = c\Delta T.$$

Ако в това равенство изразим масата на планетата чрез радиуса и плътността ѝ ($M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$) и го решим спрямо R, получаваме:

(7) $$R = \sqrt{\frac{5}{4\pi}\frac{c\Delta T}{G\rho}}.$$

Да приемем, че едно повишение на температурата ΔT = 2000 K е достатъчно за разтапяне на земните породи; че плътността им е от порядъка на 6.10^3 kg/m^3, а специфичният им топлинен капацитет е $c = 10^3$ J/(kg.K). Като отчетем, че стойността на гравитационната константа е $G = 6{,}7.10^{-11}$ m^3/(kg.s^2), получаваме:

(8) $$R \approx 1{,}4.10^6 \text{ m} = 1400 \text{ km}.$$

Коментар. Този резултат изглежда малко занижен спрямо радиусите на планетите в Слънчевата система, и основна причина за това вероятно е пренебрегването на излъчената в околното пространство енергия. Не бива да се забравя обаче, че има и процеси, които действат в противоположната посока: разпадането на радиоактивните елементи, например, води до допълнително загряване. Тъй като за астероиди се смятат телата в Слънчевата система, чиито размери не надвишават 1000 km, полученият резултат показва, че най-вероятно астероидите не са пребивавали в разтопено състояние.