Отскок от астероид

Когато се решават задачи, свързани с гравитацията, обикновено не се пропуска следната класическа *Ферми-тип* задача:

Задача: От колко голям астероид би могъл човек, отскачайки, да го напусне завинаги?

Задачата наистина притежава всички белези на Ферми-задачите: търси се оценка, а не точна стойност, в условието не са посочени данни – решаващият трябва да съобразява какво му е необходимо и да получи оценката по възможност без помощта на справочници с формули и данни.

Решение. Величината, която трябва да се оцени, е радиусът на астероида (предполагаемо – кълбовиден). "Да го напусне завинаги" очевидно означава – човекът да се отдалечи на безкрайно голямо разстояние от астероида, т.е. да преодолее гравитационното му привличане.

Най-простото решение е чрез енергетичния подход – за него е необходимо познаване само на формулата $V = -G\dfrac{M}{r}$ за потенциала на гравитационното поле извън хомогенно кълбо с маса M, на разстояние r от центъра на кълбото[1]. (Тук, разбира се, G е гравитационната константа.)

Според посочената формула, гравитационната потенциална енергия на взаимодействие на човек с маса m, стъпил на повърхността на астероид с маса M и радиус R, е:

(1) $$W = -G\frac{mM}{R}.$$

Когато е безкрайно далече от астероида, гравитационната потенциална енергия на взаимодействие е нула, което означава, че за да се отдалечи на безкрайно разстояние, мускулите на човека трябва да извършат работа:

(2) $$A = G\frac{mM}{R}.$$

Тази работа придава кинетична енергия на човека така, че общата му механична енергия става нула.

Следващата величина, която подлежи на оценка, е A. Да приемем, че на Земята човек, подскачайки, може да издигне центъра на масите си на височина най-много $h = 1$ m. Това означава, че максималната работа, която може да извърши, е $A = mgh$, където g е земното ускорение. Като заместим този израз за A в (2), получаваме следната връзка между масата и радиуса на астероида:

(3) $$\frac{M}{R} = \frac{gh}{G}$$

Ако предположим, че плътността на астероида е от порядъка на средната плътност на Земята, т.е. $\rho = 6.10^3$ kg/m^3 и използваме връзката между маса, плътност и обем на кълбо ($M = \rho V = \dfrac{4}{3}\pi\rho R^2$), от (3) получаваме окончателно:

(4) $$R = \sqrt{\frac{3gh}{4\pi\rho G}}.$$

Като заместим в (4) стойностите на величините под корена и пресметнем израза, получаваме, че за сметка на собствените си мускули човек би могъл да се освободи от гравитационното привличане на астероид с диаметър около 5 километра. Отбележете,

[1] Вж. напр. файла planetoobrazuvane.

че резултатът не зависи от масата на човека – той е еднакъв и за дебели, и за слаби хора, стига те тук, на Земята, да могат да скачат еднакво високо.