“Иконофизика” в действие, или
една стара задача в нови, пазарни условия

Доколкото ми е известно, иконофизиката представлява онази гранична област, в която се преплитат проблеми на физиката и на икономиката, а по-точно – в която за решаване на икономически проблеми се използват методи, разработвани и прилагани във физиката при изучаване на комплексни системи. Едва ли скоро тази нова за нас област ще се отрази и в обучението по физика, но все пак полу на шега, полу на сериозно, в това отношение може да бъде полезна следната задача. А в заглавието терминът “иконофизика” е поставен в кавички, защото това, което следва по-надолу, е твърде грубо профанизиране на проблемите на възникващата (или възникналата – зависи от гледната точка) интердисциплинарна наука.

Известна е "класическата" задача за пътуване с автомобил между два града A и B: градовете лежат от двете страни на праволинейна граница, деляща равнината на две части, в които движението се осъществява с различни скорости, а се търси траекторията, по която пътуването от A до B става за най-кратко време. Известен е и отговорът: траекторията трябва да се състои от две отсечки разположени така, че да бъде изпълнен законът на Снелиус за пречупване на светлината.

Днес обаче реалностите на пазарната икономика ни сблъскват по-други казуси. Щом скоростите в двете полуравнини са различни, там и условията на движение ще се различават, а това предполага най-малкото различен разход на гориво за единица път, различна скорост на износване на гумите, на двигателя и т.н. Най-общо казано, различен за двете полуравнини ще бъде разходът на материални средства за изминаване на единица път. Затова реалните превозвачи трябва да решават и задачи, подобни на следната.

Задача. Градовете A и B се намират на разстояния съответно h_1 и h_2 от двете страни на правата, която дели равнината на две части. Цената на разходите на единица път във всяка от полуравнините е съответно p_1 и p_2. При каква траектория на движение цената на пътуването от т. A до т. B е минимална? При какво условие "най-бързата" траектория е и "най-евтина"? При какво условие най-късата траектория е "най-евтина"?

Решение.

Нека припомним решението на "класическата" задача, в която се търси "най-бързата" траектория. Ще използваме означенията от фиг.1. Очевидно времето за изминаване пътя от т. A до т. B е:

$$t=\frac{l_1}{v_1}+\frac{l_2}{v_2}=\frac{1}{v_1}\sqrt{x^2+h_1^{\,2}}+\frac{1}{v_2}\sqrt{(L-x)^2+h_2^{\,2}}, \tag{1}$$

където с v_1 и v_2 са означени скоростите на придвижване в двете полуравнини, а с L – разстоянието между проекциите на т. A и т. B върху граничната права. Тъй като очевидно времето за придвижване от т. A до т. B зависи само от x (другите величини са фиксирани в условието) ще минимизираме стойността на този израз по отношение на параметъра x. Като приравним към нула производната на t по x, получаваме равенството:

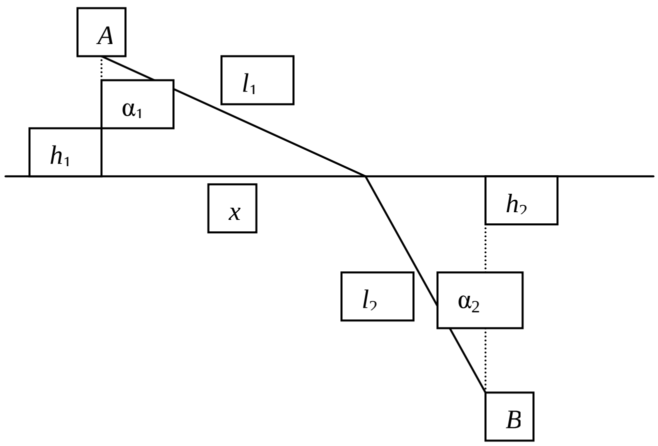
$$\frac{x}{v_1 l_1}-\frac{L-x}{v_2 l_2}=0,$$

от което веднага следва:

$$v_2\left(\frac{x}{l_1}\right) = v_1\left(\frac{L-x}{l_2}\right)$$

или

(2) $$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$



Фиг. 1.

Да се върнем сега към задачата за намиране на "най-евтината" траектория. Щом цените за изминаване на единица път в двете полуравнини са съответно p_1 и p_2, общата цена за пътуването от т. A до т. B ще бъде:

(3) $$p = p_1 l_1 + p_2 l_2 = p_1\sqrt{x^2 + h_1^{\,2}} + p_2\sqrt{(L-x)^2 + h_2^{\,2}}.$$

Уравнение (3) обаче се различава от (2) само по това, че константите p_1 и p_2 са не в знаменател, а в числител. Следователно и резултатът от минимизирането на p ще бъде подобен на (2), но с разменени места на индексите "1" и "2" в дясната страна. И така, ако с β_1 и β_2 отбележим съответните ъгли между посоката на движение и перпендикулярите от т. A и т. B към граничната права, ще бъде в сила равенството:

(4) $$\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} = \frac{p_2}{p_1}.$$

Резултатът е естествен: увеличаването на разходите за изминаване на единица път изисква скъсяване на частта от траекторията в съответната полуравнина. Така например ако $p_1 >> p_2$, ъгълът $\beta_1 \approx 0$ и движението от т. A трябва да се насочи по най-краткия път към разделителната права.

Условието, при което "най-бързата" траектория е същевременно и "най-евтина", получаваме от сравняването на (2) и (4). Вижда се, че двете траектории съвпадат, когато:

(5) $$\frac{v_1}{v_2} = \frac{p_2}{p_1} \qquad \text{или} \qquad v_1 p_1 = v_2 p_2.$$

Най-късата траектория е правата линия, която свързва т. A и т. B. Тя сключва равни ъгли с перпендикулярите от т. A и т. B към разделителната права.

Следователно, за да бъде най-късата траектория същевременно и най-евтина е необходимо $p_1 = p_2$, т.е. цената на единица път да бъде еднаква. Само в този случай от (4) следва $\beta_1 = \beta_2$.

Коментар. 1. С намирането на формула (4) физикът, нает от спедиторската фирма, завършва своята работа. По-нататък счетоводителят (или ценовикът – не знам какво е съвременното название на съответната длъжност) на фирмата трябва да пресметне по формула (3) общите разходи за пътуването. Оказва се обаче, че това не е тривиално. Наистина, прави впечатление, че както в сборниците, където се среща "класическата" задача, така и ние по-горе се задоволихме само с красивия резултат, съдържащ се в равенство (2), но никъде не се пресмята колко е всъщност най-краткото време за придвижване от т. A до т. B. Дори в този най-прост случай за подобно пресмятане трябва да се решава алгебрично уравнение от четвърта степен. По същия начин не може с елементарни средства да се получи и общата цена на пътуването по "най-евтината" траектория. Така че, за да свърши работата си, счетоводителят трябва да се обърне към програмиста на фирмата, който да напише програма за решаване на уравнението и от там нататък вече компютърът ще даде отговора.

2. Съществува обаче и един по-сериозен проблем. Тъй като в общия случай "най-евтината" траектория не съвпада с "най-бързата", използването на първата удължава времето за пътуване. А тъй като при пазарни условия "времето е пари", за да бъдем съвсем близо до реалността трябва да "осчетоводим" и времето, т.е. да кажем каква е цената на единица време, какво можем примерно да произведем и реализираме за единица време, ако то е използвано за производство, а не за пътуване. Тогава в дясната страна на равенство (3) трябва да добавим още един член, който отчита цената на удължаване времетраенето на пътуването. Това обаче усложнява твърде много задачата.