Мощност на батерия

Когато разполагате с определен набор от източници на постоянно ЕДН, чрез свързване по различен начин може да получите батерии с различни ЕДН и различни вътрешни съпротивления. Грубо казано, когато е необходим източник с по-голямо ЕДН използвате последователно свързване, а когато трябва да черпите по-силен ток – успоредно свързване. В общия случай, в зависимост от изискванията, може да се използват различни комбинации от последователно и от успоредно свързани източници.

А когато е необходимо батерията да осигури **максимална мощност**?

Този въпрос ще бъде предмет на разглеждане по-долу, но преди да го формулираме като задача, ще припомним колко е максималната мощност, която може да отдаде в консуматор източник с ЕДН $\mathcal{E}$ и вътрешно съпротивление r.

Нека съпротивлението на свързания с източника консуматор означим с R. Когато R е малко спрямо r (клони към нула), заради това, че токът във веригата е ограничен, интересуващата ни мощност също клони към нула ($P = RI^2$). Когато R е голямо спрямо r (клони към безкрайност), заради това, че напрежението върху консуматора е ограничено, отделената в него мощност също клони към нула ($P = \frac{U^2}{R}$). Фактът, че и при $R \to \infty$, и при $R \to 0$ мощността клони към нула показва, че максималната мощност се отдава при някаква крайна стойност на R, която подлежи на определяне.

(Това е случай, в който човек се изкушава да пробва какво би дал методът на размерностите. В случая търсим величина с размерност на електрично съпротивление. В условието са зададени две величини – вътрешното съпротивление на източника r, и неговото ЕДН $\mathcal{E}$. Единствената комбинация от $\mathcal{E}$ и r, която има размерност на съпротивление е самото r. Така че, ако се опрем на метода на размерностите, трябва да заключим, че в консуматора ще се отдели максимална мощност, ако съпротивлението му е $R = kr$, където k е безразмерно число от порядъка на единица. Както ще покаже разглеждането, стойността на k е точно единица.)

Нека сега намерим при какво съпротивление R на консуматора, отделената в него мощност е максимална. Според закона на Ом за затворена верига, токът през консуматора е $I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$. Законът на Джаул–Ленц определя, че отдадената в консуматора мощност е:

(1) $$P = RI^2 = \frac{R\mathcal{E}^2}{(R+r)^2}.$$

Оттук – по стандартната процедура: диференцираме по R, приравняваме производната на нула и от полученото уравнение намираме, че наистина $R = r$. С други думи, на консуматора се отдава максимална мощност, когато съпротивлението му е равно на вътрешното съпротивление на източника. От (1) получаваме и формулата за максималната мощност – при $R = r$:

(2) $$P_{\max} = \frac{\varepsilon^2}{4r}.$$

Дотук добре, но в училище стандартната процедура не върви – учениците не знаят да диференцират. И ако все пак искате да разгледате тази задача, ще трябва да прибегнете към някакъв разбираем за тях трик. А трикът е следният. Преработваме формула (1), като добавяме и изваждаме от дясната й страна израза $\frac{\mathcal{E}^2}{4r}$:

$$P = \mathcal{E}^2\left(\frac{1}{4r} - \frac{1}{4r} + \frac{R}{(R+r)^2}\right) = \mathcal{E}^2\left(\frac{1}{4r} - \frac{(R-r)^2}{4r(R+r)^2}\right).$$

Тъй като втората дроб в дясно е неотрицателна, а знакът пред нея е минус, целият израз ще достига максимум, когато тя е нула, т.е. – при $R = r$.

Разбира се, тук остава щекотливия въпрос от къде сме се досетили да прибавим и извадим $\frac{\mathcal{E}^2}{4r}$. За нас отговорът е ясен – ние знаем колко е максималната мощност, защото сме решавали задачата чрез производни, но за пред учениците ... ще трябва да се позовем на нашата досетливост.

С това предварителният проблем за максималната мощност, която може да отдаде един източник е решен. Сега да преминем към основната задача.

Задача. Дадени са N еднакви източника на постоянно напрежение с ЕДН $\mathcal{E}_0$ и вътрешно съпротивление r_0. Колко е максималната мощност, която може да отдаде батерия, получена чрез свързване на тези източници и как трябва да се свържат те, за да може да се получи тази мощност.

Анализ. Според формула (2), максималната мощност, която може да отдаде един от източниците, е:

(3) $$P_0 = \frac{\mathcal{E}_0^2}{4r_0}.$$

От физични съображения е ясно, че както и да свързваме източниците, максималната мощност, която може да отдаде получената батерия, не може да надминава NP_0. (В противен случай бихме влезли в противоречие със закона за запазване на енергията – ще се окаже, че поне един от източниците е отдал мощност, по-голяма от максималната, която може да отдаде.) Това всъщност е сумарната максимална мощност, която бихме извлекли, ако използваме източниците поотделно, т.е. без да ги свързваме в батерии. Въпросът е дали при подходящо свързване (и какво е то?) може да се достигне стойността NP_0.

Да разгледаме първо двата крайни случая – когато всички източници са свързани последователно, и когато всички са свързани успоредно.

А) Ако свържем всички източници **последователно**, според познатите правила получаваме батерия с ЕДН $\mathcal{E} = N\mathcal{E}_0$ и вътрешно съпротивление $r = Nr_0$. Съгласно с формула (2), максималната мощност, която може да отдаде батерията при последователно свързване, е:

(4) $$P = \frac{\mathcal{E}^2}{4r} = \frac{(N\mathcal{E}_0)^2}{4(Nr_0)} = N\frac{\mathcal{E}_0^2}{4r_0} = NP_0.$$

Б) Ако свържем всички източници **успоредно**, ЕДН на получената батерия е равно на ЕДН на отделния източник, т.е.

(5) $$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0,$$

а вътрешното й съпротивление се пресмята по формулата за съпротивление на N успоредно свързани резистора:

(6) $$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_0} + \ldots\frac{1}{r_0} = N\frac{1}{r_0}.$$

Тогава, с помощта на (5) и (6), от формула (2) за максималната мощност, която може да отдаде тази батерия, получаваме:

(7) $$P = \frac{\mathcal{E}^2}{4r} = \frac{1}{4}\mathcal{E}_0^2\frac{N}{r_0} = NP_0 .$$

Получи се интересен резултат: формулите (4) и (7) показват, че и при последователно, и при успоредно свързване на източниците, максималната мощност, която могат да отдадат получените батерии е една и съща – $P = NP_0$. А това, както видяхме по-горе, е въобще максималната мощност, която може да се получи от N еднакви източника!

От този резултат следват само две възможности:

– или както и да свързваме източниците, винаги максималната мощност, която може да отдаде получената батерия е NP_0;
– или при произволни свързвания максималната мощност е по-малка от NP_0, а стойността NP_0 се получава само в "граничните" случаи, когато източниците са свързани или успоредно, или последователно.

Коя от тези възможности се реализира ще установим, като разгледаме общия случай.

Решение. Общият случай е, когато разделим N-те източника на k на брой групи, всяка от които съдържа по l **последователно** свързани източника, а след това тези k групи свържем **успоредно**. С други думи, представяме числото N във вида $N = k.l$, където k и l са две цели положителни числа. (Тук е мястото да отбележим, че непременно броят на източниците във всяка група трябва да е един и същ. В противен случай, даже при отворена верига, когато няма консуматор, през някои източници ще протича ток, а това означава загуба на мощност във вътрешните съпротивления – очевидно в такъв случай на външен консуматор не може да се отдаде максималната мощност NP_0.)

Група от l последователно свързани източника има ЕДН:

(8) $$\mathcal{E} = l\mathcal{E}_0$$

и вътрешно съпротивление $r' = lr_0$. Успоредното свързване на k на брой такива групи образува батерия със същото ЕДН и вътрешно съпротивление, определено от формулата:

(9) $$\frac{1}{r} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{r'} + \ldots\frac{1}{r'} = \frac{k}{r'} = \frac{k}{lr_0} .$$

След като знаем ЕДН и вътрешното съпротивление на батерията, по формула (2) пресмятаме максималната мощност, която тя може да отдаде на външен консуматор:

(10) $$P = \frac{\mathcal{E}^2}{4r} = \frac{(l\mathcal{E}_0)^2}{4}\frac{k}{lr_0} = kl\frac{\varepsilon_0^2}{4r_0} = NP_0 .$$

Този резултат показва, че от посочените по-горе две възможности, се реализира първата: както и да свързвате източниците, максималната мощност, която може да отдаде получената батерия е винаги NP_0.

Тъй като ЕДН на батерията се определя от числото l, а самото то не фигурира в последното от веригата равенства (10), резултатът може да се изкаже и в следната, звучаща до известна степен парадоксално форма:

Максималната мощност, която може да се получи от батерия, получена от определен брой еднакви източници, не зависи от ЕДН на батерията.

Коментар. Резултатът показва още, че когато конструирате батерии от еднакви източници, не трябва да се грижите за максималната мощност, която можете да получите – във всички случаи тя е една и съща. Дали броят на последователно свързаните източници в една група ще бъде по-голям, или броят на успоредно свързаните такива групи ще бъде по-голям, отново зависи от това, дали батерията трябва да има по-голямо ЕДН, или трябва да осигури по-голям ток. Разбира се, свободата на избора зависи от това, по колко различни начина броят на източниците (N) може да се представи като произведение от два множителя. Ако, например, $N = 5$, т.е. ако N е просто число, възможностите са само две: или $k = 1$, $l = 5$, т.е. източниците са свързани последователно, или $k = 5$, $l = 1$ – когато източниците са свързани успоредно. Ако обаче $N = 12$, възможностите са значително повече ((1,12), (2,6), (3,4), (4,3),(6,2) и (12,1)).

Тема за размисъл. Изводът, че максималната мощност, която може да отдаде батерията не зависи от нейното ЕДН, т.е. от начина, по който сме представили N във вида $N = kl$, звучи в известен смисъл твърде просто. Пресмятанията, с които стигнехме до него, също не са сложни, но неговата простота отваря друг въпрос, над който може би си следва да се помисли: дали до същия извод не бихме могли да стигнем от някакви по-общи съображения, без детайлни пресмятания?

На този въпрос аз не знам отговора.