

Една задача за средна скорост

Задача. Колоездач прави първата обиколка на колодрума със средна скорост 20 km/h. С каква средна скорост трябва да направи втората обиколка, така че средната скорост за двете обиколки да бъде 40 km/h?

Качествено решение. Въпреки че в условието са зададени числа, задачата може да се реши на качествено равнище чрез следното разсъждение.

За **две** обиколки със скорост 40 km/h на колоездача е необходимо време, колкото за **една** обиколка със скорост 20 km/h. Той обаче вече е изразходвал това време, когато е правил първата обиколка! Следователно втората обиколка трябва да направи за **нула** време, т.е. – с безкрайно голяма скорост.

По-добра формулировка на заключението е следната: с каквато и средна скорост да направи **втората** обиколка колоездачът, средната му скорост общо за **двете** обиколки ще бъде по-малка от 40 km/h.

Количествено решение. Нека означим с $v_1 = 20$ km/h средната скорост по време на първата обиколка, с $v_{\text{ср.}} = 40$ km/h общата средна скорост за двете обиколки, а с v_2 – търсената средна скорост при втората обиколка. Ако освен това дължината на една обиколка означим с s , времето за изминаване на първата обиколка ще бъде $t_1 = \frac{s}{v_1}$, а

общото време за изминаване на двете обиколки – $t_{\text{об.}} = \frac{2s}{v_{\text{ср.}}}$. При това положение за

изминаване на втората обиколка (път с дължина $s!$) остава време $(t_{\text{об.}} - t_1)$, което означава, че средната скорост във втората обиколка трябва да бъде:

$$v_2 = \frac{s}{t_{\text{об.}} - t_1} = \frac{s}{\frac{2s}{v_{\text{ср.}}} - \frac{s}{v_1}} = \frac{v_1 v_{\text{ср.}}}{2v_1 - v_{\text{ср.}}} = \frac{20 \cdot 40}{2 \cdot 20 - 40} = \infty.$$

Резултатът показва, че задачи от този тип не винаги имат решение. Затова нека направим обобщение, като решим следната задача.

Задача. Колоездач изминава път s_1 със средна скорост v_1 , след което изминва допълнително още разстояние s_2 . С каква средна скорост трябва да измине допълнителното разстояние, така че средната скорост за целия път да бъде равна на v_0 ?

Решение. Щом средната скорост за изминаване път $s_1 + s_2$ е v_0 , общото време за движение е $\frac{s_1 + s_2}{v_0}$. Тъй като времето за изминаване на първата част е $\frac{s_1}{v_1}$, за

изминаване на втората част остава време $\frac{s_1 + s_2}{v_0} - \frac{s_1}{v_1}$. Следователно средната скорост за изминаване на втората част от пътя е:

$$(1) \quad v_2 = \frac{s_2}{\frac{s_1 + s_2}{v_0} - \frac{s_1}{v_1}} = \frac{s_2}{s_1 \left(\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v_1} \right) + \frac{s_2}{v_0}}.$$

Последният начин на записване показва, че ако $v_0 < v_1$, изразът в скобата в знаменателя е положителен, цялата дроб е също положителна и следователно в този случай задачата винаги има решение. (Това всъщност е случаят, когато средната скорост за целия път е по-малка от средната скорост върху началния участък.)

Ако обаче $v_0 > v_1$, изразът в скобата е отрицателен. При това положение дали задачата има решение (т.е. дали $v_2 > 0$) зависи от съотношението между дължините на първия и втория участък от пътя. Условието знаменателят на (1) да бъде положителен:

$$s_1 \left(\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v_1} \right) + \frac{s_2}{v_0} > 0$$

може да се запише още във вида:

$$(2) \quad \frac{s_2}{s_1} > \frac{v_0}{v_1} - 1,$$

което показва, че задачата има решение и в този случай, стига дължината на втория участък да е достатъчно голяма.

В частния случай, с който започнахме, $\frac{s_2}{s_1} = \frac{s}{s} = 1$, а $\frac{v_0}{v_1} = \frac{40}{20} = 2$ и неравенството

(2) не е изпълнено. Това е и причината, поради която задачата нямаше решение.