

## “Трактат” за падащ комин

### Мотиви

Динамиката на твърдо тяло отдавна е изпаднала от училищните програми за общозадължителна подготовка по физика. Със сигурност това положение ще се запази и при обновяването на държавните образователни изисквания за учебно съдържание за 8.–10. клас – наистина, не е необходимо *всеки* завършващ средното училище да знае какво е инерчен момент и как от него зависи въртенето на едно тяло<sup>1</sup>. В програмите за разширено изучаване на физика в 11. или 12. клас обаче този раздел от механиката ще намери място – твърде много явления се обясняват със закономерностите, изучавани в него и твърде многобройни са техните практически приложения.

Сборниците със задачи по физика изобилстват с интересни задачи от динамика на твърдо тяло. При формалното им решаване обаче остава скрито важното обстоятелство, че

**движението на всеки елемент от тялото се определя както от външните сили, които му действат (напр. силата на тежестта), така и от равнодействащата на всички вътрешни сили, с които му действат останалите елементи на тялото.**

Тъй като съгласно с третия принцип на Нютон общата сума от вътрешните сили е нула, те не влияят на движението на центъра на масите на тялото, но без тяхното отчитане не можем да обясним особеностите на движението. За разкриване ролята на вътрешните сили е подходящо разглеждането на следния популярен в литературата проблем.

### Предистория

Преди години, когато у нас още нямаше интернет, някъде в сборник със задачи, в учебник или в журнална статия – за съжаление, вече не помня къде – срещнах задачата за падащия комин. Според спомените ми, там се твърдеше, че когато висок цилиндричен комин се наклони и започне да пада, вероятността при удара в земята да се пречупи е най-голяма в точка, която разделя комина на части, чиито дължини се отнасят както 2:1. За съжаление, не си спомних и най-важното – коя част на пречупения комин е по-дълга – горната или долната<sup>2</sup>. Тъй като въпросът ме заинтересува, реших да проверя какви публикации по него може да се открият в интернет. Тяхното изобилие ме изненада.

Оказва се, че въпросът за чупенето на падащ комин е твърде сложен и с него на различни равнища са се занимавали поне от 70–80 години насам много автори на учебници, на журнални статии и на популярни материали. (Няма да е изненада, ако се окаже, че с него са се занимавали още класиците.) Преди всичко следва да се има

<sup>1</sup> Съвсем по друг начин стои въпросът за кинематиката и динамиката на въртливо движение на материална точка, които днес също не влизат в общообразователния минимум. Изпаднали сме в абсурдното положение хора с дипломи за завършено средно образование да не са чували за единицата “обороти в секунда” и за силата, която трябва да действа на едно тяло, за да се движи то равномерно по окръжност!

<sup>2</sup> Тъй като задачата е интересна, когато подбиха материали за този адрес в интернет, реших да включа и нея. Опирайки се на неясните си спомени, в постинг, озаглавен “Къде се чупи падащ комин?”, писах:

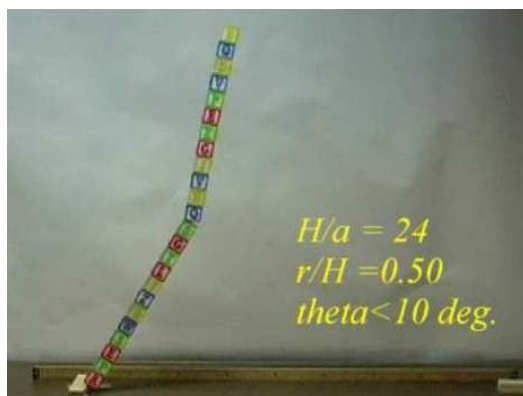
“Забелязано е, че когато поради някаква причина висок цилиндричен комин се наклони и започне да пада, вероятността при удара в земята да се пречупи е най-голяма за точката, която отстои *от основата* на разстояние  $2/3$  от неговата дължина. Въпросът е какво отличава тази точка от останалите?”

Там се помъчих да обоснова това твърдение, и, въпреки че разглежданията са верни, заключението се оказа погрешно, поради което с нех постинга и го заменяя с настоящия материал. Интересно е, че и един от първите автори<sup>[10]</sup>, занимавал се с този проблем, е стигнал до същото погрешно заключение.

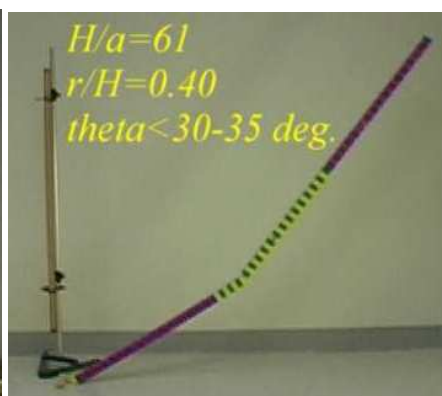
предвид, че комините (особено тези, които са изградени от тухли), се чупят още във въздуха, преди удара в земята. Най-пълнен съвременен обзор с над 30 цитирани работи по проблема намерих в <sup>[1]</sup>. На качествено равнище въпросът е разгледан в <sup>[2]</sup>, където без обосновка се твърди:

“Ако двете части на комина не са свързани здраво, горната част би имала по-малко ъглово ускорение от долната. Ето защо, по време на падането в определен участък от комина възниква механично напрежение. В началото на падането най-голямо е напрежението в *средата* на комина и най-вероятно той ще се счупи там. Ако коминът се чупи към края на падането, то счупването (предизвикано от деформации на отместване) става някъде *на равнището от една трета от височината му* (к.м.)”

Тези твърдения се илюстрират с взетите от [1] фиг. 1 и фиг. 2. На тях са показани снимки от видео, на което е заснето падането на модел на комин при различно отношение между височината  $H$  и напречния размер  $a$  на “комина”. Вижда се, че относително “по-дебелият комин” се чупи в средата и то при по-малък ъгъл на наклона спрямо вертикалата, докато “по-тънкият комин” се чупи по-близо до основата и при по-голям ъгъл на наклона. Интересни видеоклипове на падащи реални комини може да се видят в <sup>[3]</sup> и на ред други адреси в интернет.



Фиг. 1



Фиг. 2.

Също на качествено равнище, но много по-аргументирано, отколкото в [2] е разгледан въпросът в <sup>[4]</sup>. Там авторът не разглежда къде става чупенето, а се ограничава само да изясни как се огъва коминът при падането си – с изпъкналата или с вдлъбнатата страна към земята.

### Прътът като физично махало

По-долу ще се занимаваме само с въпроса за “безкрайно тънък комин”, т.е. по същество ще разгледаме падането на тънък хомогенен вертикален прът, чиято опорна точка върху земята е неподвижна (опорната точка играе роля на неподвижна ос на въртене, т.е. няма приплъзване в хоризонтална посока). При това ще правим разглеждането на т.нар. второ равнище от програмата по физика и астрономия за 10. клас <sup>[5]</sup>, което изисква познаване на величината инерчен момент и на закона за въртене на твърдо тяло около постоянна ос.

Представете си сега, че преобърнем вертикалния прът и вместо да стърчи подпрян в долния си край, той виси надолу. Това е познатият модел **физично махало**. Следователно, без значение дали е нагоре или надолу, под влияние на силата на тежестта движението на пръта ще се подчинява на закона за движение на физично махало.

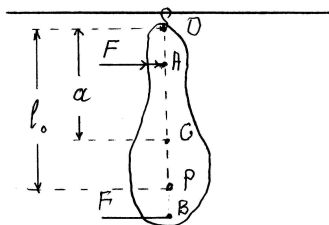
Тъй като се интересуваме от това, къде би се счупил пръта, нека припомним има ли точки в едно физично махало, чието движение се отличава с някаква особеност – би

могло да се очаква, че чупенето ще става в някоя подобна точка. Всъщност, има поне една такава точка – това е т.нар. *център на люлеенята*. За да разберем какво е по-особено в нейното движение, ще припомним съответното определение.

Периодът на физично махало с маса  $m$  при малки отклонения от равновесното положение се определя от формулата:

$$(1) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}},$$

където  $g$  е земното ускорение,  $I$  – инерчният момент на махалото спрямо оста на въртене т.  $O$ , а  $a$  е разстоянието от т.  $O$  до центъра на масите т.  $C$  (фиг.3).



Фиг. 3.

Величината:

$$(2) \quad l_0 = \frac{I}{ma}$$

има размерност на дължина и се нарича *приведена дължина* на махалото. Като заместим (2) в (1), получаваме познатата формула за период на малки трептения на

математично махало ( $T = 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{g}}$ ) – факт, който разкрива смисъла на  $l_0$ : *приведената*

дължина на физичното махало е равна на дължината на математично махало със същия период на люлеения.

Тъй като винаги  $l_0 > a$ , ако от точката на окачване нанесем отсечка с дължина  $l_0$ , другият ѝ край ще попадне в т.  $P$  (фиг. 3), която в устойчивото равновесно положение се намира *под* центъра на масите. Тъкмо тази точка се нарича *център на люлеене*.

Центърът на люлеене има интересни свойства, някои от които ще установим, а други с важно практическо значение само ще споменем. Така например, ако чрез кукичка оста на махалото е окачена на хоризонтална жица в равнината на люлеене, интуитивно трябва да е ясно следното.

Ако ударим махалото в хоризонтална посока със сила  $F$ , поведението му ще зависи от мястото на удара. В случай, че приложената точка на  $F$  е близо до точката на окачване (напр. в т.  $A$  на фиг. 3), махалото, ще се залюлее, но част от енергията на удара ще предизвика движение на точката на окачване в посока на  $F$ . Ако ли пък ударът е в т.  $B$ , т.е. под центъра на люлеене, махалото отново ще се залюлее, но сега точката на окачване ще се задвижи по жицата в посока, обратна на  $F$ . И само когато ударът е в центъра на люлеене т.  $P$ , цялата енергия от удара отива за разлюляване на махалото, като точката на окачване остава неподвижна. Тези свойства имат значение при работа с ударни инструменти (напр. с чук), при удар със сабя, при удар на топка с тенисна ракета и т.н. – ударът е най-ефективен, когато топката се удари в центъра на люлеене на ракетата<sup>3</sup>.

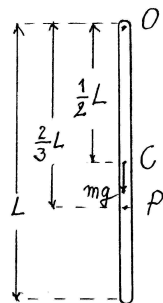
<sup>3</sup> По тази причина центърът на люлеене на английски се нарича и centre of percussion.

Нека сега преминем към разглеждане на нашето конкретно физично махало – прът с дължина  $L$  и маса  $m$  (фиг. 4). Инерчният момент на пръта се описва с формулата (вж. напр. “Библията” на българския учител по физика <sup>[7]</sup>, стр. 228):

$$(3) \quad I = \frac{1}{3}mL^2,$$

а разстоянието от оста на въртене т.  $O$  до центъра на масите т.  $C$  е  $a = L/2$ . В такъв случай за приведената дължина на махалото от (2) получаваме израза:

$$(4) \quad l_0 = \frac{I}{ma} = \frac{mL^2}{3} \frac{1}{m \frac{L}{2}} = \frac{2}{3}L.$$



Фиг. 4.

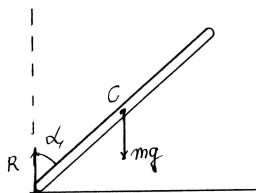
Вижда се, в този частен случай се изпълнява общото правило  $l_0 > a$ , т.е. центърът на люлеене (т.  $P$ ) наистина се намира по-далеч от оста на въртене (т.  $O$ ), отколкото центърът на масите (т.  $C$ ).

Нека сега се върнем към интересувания ни случай, в който прътът започва да пада от неустойчивото вертикално равновесно положение. Тъй като дотук анализът разкри т.  $P$  като единствена, чието движение е по-особено от движенията на останалите точки от пръта, върху нея “пада и подозрението”, че тъкмо там може да стане и счупването.

### Полукачествен (или полуколичествен) анализ

Първо да анализираме какво следва от факта, че прътът пада като *едно* тяло. Ще определим ъгловото му ускорение  $\varepsilon$  в момента, когато сключва с вертикалата ъгъл  $\alpha$  (фиг. 5). Уравнението за движение на тяло, въртящо се около постоянна ос <sup>[8]</sup> има вид:

$$(5) \quad M = I\varepsilon,$$



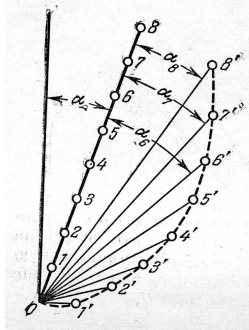
фиг. 5.

в което  $M$  е въртящият момент на силата, която действа на тялото, а  $I$  – инерчният му момент. В нашия случай въртенето става под влияние на силата на тежестта  $G = mg$ ,

чието рамо е  $L/2$ , така че  $M = mg \frac{L}{2} \sin \alpha$  (рамото на реакцията на опората  $R$  е нула, така че тази сила не влияе на падането). Тъй като  $I$  се описва с (3), от (5) за ъгловото ускорение на пръта получаваме:

$$(6) \quad \varepsilon = \frac{3}{2} \frac{g}{L} \sin \alpha .$$

Нека сега си представим, че сме разрязали пръта на голям брой малки еднакви елементи, които не са свързани помежду си, но посредством тънки безмасови пръчки са свързани с оста на въртене. На фиг. 6 (взета от [4]) броят на елементите е 8 и прътът е изобразен в положение, при което сключва с вертикалата ъгъл  $\alpha_0$ . Това означава, че по същество сега заменяме пръта с 8 математични махала, отклонени на един и същ начален ъгъл ( $\pi - \alpha_0$ ) от устойчивото си равновесно положение (което е вертикално,



Фиг. 6.

но надолу!). Ако освободим махалата, те ще започнат *независими* едно от друго люлеения. Тъй като началният ъгъл не е малък, за периодите им не можем да използваме формулата  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ . Известно е обаче, че и при големи ъгли на

отклонение *махала с по-голяма дължина имат по-голям период*. В нашия случай най-малък период има махало номер 1, най-голям – махало номер 8, а честотите на люлеенията им ще бъдат съответно най-голяма за махало 1 и най-малка – за махало 8. Това означава, че след малък интервал време махалата вече няма да бъдат на една права, а ще заемат положенията, разположени по пунктираната крива линия<sup>4</sup> от фиг. 6. Фактът, че при падането си прътът остава праволинеен, т.е. – че всичките му части имат едно и също ъглово ускорение  $\varepsilon$  (вж. (6)) свидетелства, че **между частите на пръта действат вътрешни сили**, които не позволяват да приеме формата на пунктираната крива от фиг. 6.

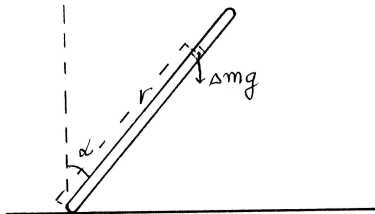
Доколкото направеното разсъждение се опира на интуитивно ясното, но тук недоказано твърдение, че и при големи начални ъгли периодът на математичното махало расте с увеличаване на дължината му<sup>5</sup>, ще приведем и по-строги съображения, които също водят да заключението за наличие на вътрешни сили. За целта всяка от частите, на които сме “разрязали” пръта, разглеждаме като материална точка с маса  $\Delta m$ , отстояща от оста на въртене на разстояние  $r$  (фиг. 7). Въртящият момент, който действа на показания на фигурата елемент в положението, в което прътът сключва с вертикалата ъгъл  $\alpha$ , е  $\Delta M = \Delta mgr \sin \alpha$ . Тъй като инерчният момент на елемента  $\Delta I =$

<sup>4</sup> Видът на пунктираната крива обяснява защо отсечено тънко дърво при падането си се огъва така, че към земната повърхност е насочена изпъкналата страна на кривата.

<sup>5</sup> Както отбелязахме при задачата за двете движещи се маниста, доказателството на това твърдение включва използване на елиптически интеграли. (Вж. постинга “Пример за комбиниране на метода на екстремните стойности и метода на размерностите”.)

$\Delta m r^2$ , като заместим изразите за  $\Delta M$  и  $\Delta I$  в закона за движение (5), за ъгловото ускорение на  $i$ -тия елемент получаваме израза:

$$(7) \quad \varepsilon = \frac{g}{r} \sin \alpha .$$



Фиг. 7.

Вижда се, че ако елементите на пръта се движеха като математични махала, най-голямо ъглово ускорение биха имали елементите, близки до оста на въртене, а най-малко – близките до върха на пръта. И тъй като на практика всички елементи падат с едно и също ускорение (6), отново стигаме до заключението, че на всеки елемент действа и определена вътрешна сила, перпендикулярна на пръта. Въртящият момент на тази сила, добавен към въртящия момент, създаден от силата на тежестта  $\Delta G$ , има за резултат изравняване на ъгловите ускорения на различните елементи, поради което прътът остава праволинеен.

По своя произход въпросните вътрешни сили могат да се дължат само на незабележими еластични деформации<sup>6</sup>, които пораждат в пръта сили на еластичност в **напречно** направление. По силата на третия принцип на механиката еластичните деформации и предизвиканите от тях сили в различните точки от пръта не могат да бъдат еднопосочни – в противен случай (т.е. ако посоките са еднакви) сумата им няма да бъде нула и прътът би започнал да се “самоускорява”.

Сравнението на формулите (7) и (6) показва, че за да се изравнят ъгловите ускорения на всички елементи, на близките до оста на въртене елементи трябва да действат сили, които забавят въртенето им, а на близките до върха на пръта елементи – сили, които ускоряват въртенето.

От казаното дотук следва, че някъде по дължината на пръта има елемент, да го наречем **неутрален**, на който не действат вътрешни сили. Вътрешните сили ускоряват елементите, намиращи се между неутралния елемент и върха на пръта и забавят елементите, разположени между оста на въртене и неутралния елемент.

### Количествено разглеждане

Нека потърсим разстоянието от оста на въртене до неутралния елемент. За целта първо ще изясним какво отличава неговото движение от движението на останалите елементи. Щом той се върти само под действие на силата на тежестта, линейната му скорост  $v$  в даден момент може да се определи от закона за запазване на енергията: придобитата при завъртането кинетична енергия трябва да е равна на намалението на неговата гравитационната потенциална енергия. Така, ако  $\Delta h$  е разликата във височините на неутралния елемент между началното неподвижно положение на пръта и положението в даден момент, то от този закон следва:

<sup>6</sup> Точно както тежестта на поставената върху масата книга предизвиква незабележими деформации и в масата, и в самата книга.

$$(\Delta m)g(\Delta h) = \frac{1}{2}(\Delta m)v^2 \quad \text{или} \quad v = \sqrt{2g\Delta h},$$

което не е нищо друго, освен закон за скоростта при свободното падане от височина  $\Delta h$ . Съществено в случая е, че за останалите елементи на пръта не можем да направим подобно разглеждане, тъй като не знаем големините на вътрешните сили, които им действат (знаем само техните посоки).

И, така една особеност на движението на неутралния елемент се свежда до това, че само неговата линейна скорост в даден момент е равна по-големина на скоростта, която той би придобил при свободно падане от същата височина. Ъгловата скорост  $\omega$  обаче е една и съща за всички елементи на пръта. Оттук и от формулата за линейна скорост  $v = \omega r$  следва, че линейните скорости на елементите, разположени по-близо до върха на пръта от неутралния елемент, ще бъдат **по-големи**, отколкото биха били при свободното им падане! (Разбира се, за елементите, които са по-близо до оста, важи обратното.)

В литературата са описани различни прости, но ефектни постановки, с които се демонстрира, че наистина точките, близки до свободния край на падащ прът, който се върти около другия си край, падат с ускорение, по-голямо от  $g$ . Интересни видеоклипове с подобни демонстрации се намират на адрес<sup>[9]</sup>.

**А) Енергетичен подход.** Оказва се, че енергетичният подход е достатъчен за определяне положението на неутралния елемент.

Тъй като в началото прътът е вертикален и неподвижен, цялата негова механична енергия е равна на гравитационната му потенциална енергия  $E = \frac{1}{2}mgL$ . В момента, в който при падането си прътът сключва с вертикалата ъгъл  $\alpha$  (фиг.5), неговият център на тежестта се намира на височина  $(L/2)\cos\alpha$  и потенциалната му енергия е съответно  $\frac{1}{2}mgL\cos\alpha$ . От друга страна кинетичната енергия на тяло, въртящо се около неподвижна ос, се определя от инерчния момент  $I$  на тялото и от ъгловата скорост на въртене  $\omega$  по формулата  $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$  (вж. [8]). Законът за запазване на механичната енергия осигурява равенството:

$$\frac{1}{2}mgL = \frac{1}{2}mgL\cos\alpha + \frac{1}{2}I\omega^2.$$

Като заместим тук инерчния момент на пръта с израза от (3), решим полученото уравнение за  $\omega$  и използваме тъждеството  $1 - \cos\alpha = 2\sin^2(\alpha/2)$ , получаваме:

$$(8) \quad \omega = \sqrt{6\frac{g}{L}\sin\frac{\alpha}{2}},$$

Ако означим с  $l$  търсеното разстояние от оста на въртене до неутралния елемент, за линейната скорост на този елемент намираме:

$$(9) \quad v = l\omega = l\sqrt{6\frac{g}{L}\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Според казаното по-горе обаче, същата скорост можем да изразим и като скорост, придобита при свободно падане от височина  $\Delta h = l - l\cos\alpha = 2l\sin^2\frac{\alpha}{2}$ , т.е.

$$(10) \quad v = \sqrt{2g\Delta h} = \sqrt{4gl}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Като приравним десните страни на (9) и (10) и решим полученото уравнение спрямо  $l$ , намираме:

$$(11) \quad l = \frac{2}{3}L.$$

От сравнението с (4) се вижда, че  $l = l_0$ , т.е. така нареченият от нас неутрален елемент се намира в центъра на люлеене на пръта.

**Б) Кинематичен подход.** Друга особеност на движението на центъра на люлеене може да разкрием, като поставим въпроса на какво разстояние  $r$  от оста на въртене се намира елементът, чието ъглово ускорение във всеки момент е равно на ъгловото ускорение (6) на целия прът. Тъй като формула (7) описва ъгловото ускорение на елемента при условие, че той пада по окръжност независимо от останалите елементи, за да намерим  $r$  приравняваме десните страни на (7) и (6) и отново

$$\text{получаваме } r = \frac{2}{3}L.$$

С други думи, движението на т.нар. неутрален елемент, на който не действат вътрешни сили, се отличава и с това, че *ъгловото ускорение на математично махало с дължина, равна на приведената дължина на пръта, е равно на ъгловото ускорение на пръта, при условие, че и махалото, и прътът са отклонени на един и същ ъгъл.*

#### **В) Динамичен подход**

Дотук изяснявахме особеностите на движението на “неутралния” елемент на пръта, т.е. на неговия център на люлеене. Тези особености обаче не дават аргументи в полза на предположението, че, падайки, прътът (коминът) ще се пречупи на разстояние

$$r = \frac{2}{3}L \text{ от оста на въртене. Установихме, че върху елементите от пръта, намиращи се}$$

между неутралния елемент и оста на въртене, действат вътрешни сили с една посока, а върху елементите между неутралния елемент и върха на пръта – вътрешни сили в противоположна посока. Точно в самия елемент обаче големината на вътрешната сила е нула, така че не можем да очакваме чупенето да стане там.

Тъй като ролята на вътрешните сили е да създават подходящи въртящи моменти, предизвикващи изравняване на ъгловите ускорения на елементите, може да очакваме, че чупенето ще настъпи точно в елемента, за който съответният въртящ момент е максимален. За да намерим този елемент ще използваме един опростен динамичен подход, като запишем уравнението на движение на елемента с маса  $\Delta m$ , който се намира на разстояние  $r$  от оста на въртене. Този елемент се върти под действие на въртящите моменти на две сили: на момента  $\Delta mgr \sin \alpha$  на неговата сила на тежестта, и на търсения неизвестен момент  $\Delta M$ , създаден от вътрешните сили. И тъй като инерчният момент на елемента е  $\Delta I = \Delta mr^2$ , а ъгловото му ускорение е известно и се описва с (6), въпросното уравнение на движение (5) има вида:

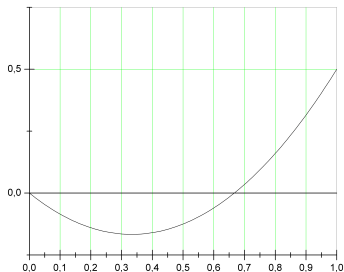
$$\Delta M + \Delta mgr \sin \alpha = \Delta mr^2 \left( \frac{3}{2} \frac{g}{L} \sin \alpha \right).$$

Оттук за зависимостта на въртящия момент на вътрешните сили от разстоянието до оста на въртене намираме израза:

$$(12) \quad \Delta M = \Delta mg \left( \frac{3}{2} \frac{r^2}{L} - r \right) \sin \alpha.$$

Графиката на функцията в скобите (при  $L = 1$ ) е показана на фиг. 8.





Фиг. 8

Както от (12), така и от графиката се вижда, че  $\Delta M = 0$  в две точки – в оста на въртене ( $r = 0$ ) и в центъра на люлеене ( $r = 2L/3$ ). Отрицателният знак на въртящия момент между тези две точки показва, че там моментът забавя въртенето на елементите, а от центъра на люлеене до края на пръта, където знакът на  $\Delta M$  е положителен – ускорява въртенето на елементите. Този извод е в съответствие с изводите, направени при качествено разглеждане.

Мястото на най-големия въртящ момент по дължината на пръта, където очакваме чупенето, може да се намери по стандартната процедура за търсене на минимум на функцията (12). Поради това, че в училище като правило не ползваме операцията диференциране, бихме могли да я избегнем чрез следното преобразование:

$$\Delta M = \Delta mg \left( \frac{3r^2}{2L} - r \right) \sin \alpha = \Delta mg \left( -\frac{L}{6} + \frac{L}{6} + \frac{3r^2}{2L} - r \right) \sin \alpha = \Delta mg \left[ -\frac{L}{6} + \frac{(L-3r)^2}{6L} \right] \sin \alpha.$$

От това представяне се вижда, че минималната стойност на израза в средната скоба се достига, когато изразът в малката скоба е нула, т.е. при:

$$(13) \quad r_0 = \frac{L}{3}.$$

И така, опростеното динамично разглеждане на проблема показва, че е най-вероятно коминът (прътът) да се счупи на разстояние  $1/3$  от общата дължина над опорната точка. Този подход обаче оставя и един отворен въпрос: защо не се отчупи върхът на комина, където (както се вижда от фиг. 8) въртящият момент по модул е още по-голям, отколкото на разстояние  $L/3$  от оста на въртене.

### Пълно решение

Пълното решение изисква разглеждане на движението не на отделен елемент от пръта, а на, примерно, неговата горна част, имаща определена дължина  $x$ <sup>[11]</sup>. Това движение се определя от два въртящи момента. Единият,  $M_1$ , се определя от собствената ѝ тежест  $\left(\frac{x}{L}m\right)g$ . Приложната точка на тази сила е в средата на тази горна част, т.е. на разстояние  $\frac{x}{2}$  от границата между двете части, така че когато прътът сключва ъгъл  $\alpha$  с вертикалата, въпросният въртящ момент е:

$$(14) \quad M_1 = \left(\frac{x}{L}mg\right)\frac{x}{2}\sin \alpha.$$

Вторият въртящ момент, който определя въртенето на горната част на пръта, е неизвестният момент  $M$ , който се дължи на деформацията на долната част и действа в посока, обратна на  $M_1$ , за да може всички точки да се движат с едно и също ускорение.

Тъй като инерчният момент на горната част на пръта е  $\frac{1}{3}\left(\frac{x}{L}m\right)x^2$ , уравнението на движение за тази част има вид:

$$M_1 - M = \frac{1}{3} \frac{x}{L} mx^2 \varepsilon.$$

Като заместим тук  $M_1$  от (14) и  $\varepsilon$  от (6), за въртящият момент, дължащ се на деформацията на долната част на пръта получаваме:

$$(15) \quad M = \frac{mg}{2L} \left( x^2 - \frac{x^3}{L} \right) \sin \alpha.$$

Вижда се, че тази функция е нула както при  $x = 0$ , така и при  $x = L$ , което гарантира, че прътът няма да се счупи нито при върха, нито при оста на въртене. Така отвореният въпрос, който остана при опростеното решение, получи отговор.

Лесно се проверява, че функцията (15) има максимум при  $x = \frac{2}{3}L$ . Като преминем към променливата  $r$ , която използвахме преди, т.е. като отчетем, че  $x = L - r$ , отново получаваме, че най-вероятното място на пречупване на пръта е на разстояние  $r = \frac{L}{3}$  от оста на въртене.

Още по-пълно решение, в което се разграничават ролите на огъващата сила, която действа на определена част от пръта и на вътрешният огъващ момент, може да се намери в <sup>[12]</sup>. Там вече се вижда, че наистина резултатът (13) е валиден само при условие, че напречните размери на пръта се пренебрегват спрямо дължината му.

### Източници

1. **Varieschi G., К. Kamiya**, Toy models for the falling chimney, [http://arxiv.org/PS\\_cache/physics/pdf/0210/0210033v2.pdf](http://arxiv.org/PS_cache/physics/pdf/0210/0210033v2.pdf).
2. **Уокер Дж.** Физический фейерверк, М., Мир, 1979.
3. <http://www.youtube.com/watch?v=Qb6tcqTnAms>
4. **Маковецкий П.В.** Смотри в корень! М., Наука, ГРФМЛ, 1979.
5. Учебни програми IV част за задължителна и профилирана подготовка в IX, X, XI и XII клас, КОО Природни науки и екология, Главна редакция на педагогическите издания към МОН, С., 2003.
6. <http://www.youtube.com/watch?v=NFJPQLhWPwA>
7. **Борисов М. и др.** Физика 9. клас, С., Народна просвета, 1974.
8. **Попов Хр. и др.** Физика и астрономия за 10. клас, профилирана подготовка, С., Просвета, 2001.
9. <http://www.youtube.com/watch?v=NFJPQLhWPvA>
10. **Sutton R.M.** Concerning falling chimneys, Science, **84**, 1936, p. 246–247.
11. **Cahn S.B., В.Е. Nadgorny** A Guide to Physics Problems, part 1, N.Y., Plenum Press, USA, 1994.
12. **Кронин Дж., Д. Гринберг, В. Телегди** Сборник задач по физике с решениями, М., Атомиздат, 1975.