Една задача, свързана с баскетбола

Задача. Тяло, хвърлено под ъгъл спрямо хоризонта, се издига на максимална височина h. Каква част от времето на полета тялото се намира на височина, по-голяма от kh, където $0 < k < 1$. Земното ускорение е g, съпротивлението на въздуха се пренебрегва.

Поднесена в този вид, задачата не подсказва никаква връзка с играта на баскетбол или с нещо, което можем да наблюдаваме във всекидневието. Ето защо тя няма с какво да заинтригува – задача като задача, всеки, усвоил законите за свободното падане, би я решил, без да получи какъвто и да е емоционален заряд.

Съвсем различно ще изглежда ситуацията, ако напомните на учениците нещо, което всеки от тях със сигурност е наблюдавал. В спортните новини често показват моменти от интересни баскетболни срещи (особено в NBA – Националната баскетболна асоциация на САЩ). Не е необходима изключителна наблюдателност, за да забележите, че често, преди да шутира към коша, играчът отскача и като че ли "зависва" за известно време неподвижен във въздуха – време, което той използва, за да се прицели и хвърли топката.

Наистина ли е така, или това е само някаква илюзия? Отговор на този въпрос дава решението на цитираната задача. Затова при решаването й ще говорим не за "тяло" въобще, а конкретно – за играча.

Анализ. Движението на тяло, хвърлено под ъгъл спрямо хоризонта, се състои от две независими движения – във вертикално и в хоризонтално направление, като времето на полета се определя от вертикалната съставяща на началната скорост. Затова при решаването на тази задача на движението в хоризонтална посока няма да отделяме внимание.

Нека вертикалната съставяща на скоростта, с която отскача играчът, означим с v. Една мислена хоризонтална права, прекарана на височина kh, би разделила траекторията на движението на две части, които условно можем да наречем долна и горна. Тъй като движението нагоре е равнозакъснително с начална скорост v, а надолу – равноускорително с начална скорост нула, очевидно е, че средната вертикална скорост в горната част на траекторията е по-малка от средната вертикална скорост в долната част. Ето защо, например при $k = 0{,}5$, времето, прекарано над мислено прекараната права, ще бъде повече от половината време, прекарано от играча във въздуха.

Да проверим как стоят нещата количествено, ще решим задачата в общия случай, след което ще дадем и конкретни стойности на параметрите.

Количествено решение. За избягване на подробни пресмятания, ще използваме някои известни резултати, получени при решаване на елементарни задачи за свободно падане. Задаването на максималната височина на издигане h позволява по познатата формула $v = \sqrt{2gh}$ да намерим вертикалната компонента на началната скорост. От нея и от връзката между скорост, ускорение и време при равнозакъснително движение с нулева крайна скорост ($0 = v - gt$) намираме и времето за достигане на височина h:

$$t = \frac{v}{g} = \frac{\sqrt{2gh}}{g} = \sqrt{\frac{2h}{g}}\ .$$

Тъй като времето за издигане е равно на времето за падане, общото време, през което играчът се намира във въздуха е:

(1) $$t_0 = 2t = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}\ .$$

Времето за падане от височина h до височина kh е два пъти по-малко от времето t_k, през което играчът се намира на височина, по-голяма от kh, и може да се свърже с h и kh посредством закона за пътя при равноускорително движение без начална скорост:

$$h - kh = \frac{g}{2}\left(\frac{t_k}{2}\right)^2 .$$

Оттук намираме:

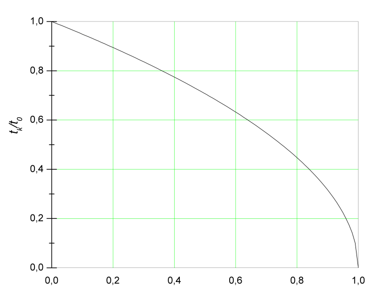
(2)
$$t_k = 2\sqrt{\frac{2h(1-k)}{g}} .$$

С помощта на изразите (2) и (1) намираме каква част от времето на целия полет над земята играчът се намира на височина, която представлява k-та част от максималната височина на издигане:

(3)
$$\frac{t_k}{t_0} = \sqrt{1-k} .$$

Ако в (3) заместим k = 1/2, получаваме $\frac{t_k}{t_0} = 0{,}707$, т.е. над 70 % от времето за полета играчът прекарва на височина, по-голяма от половината на максималната височина на издигане. Ако изберем за k стойност k = 0,8, за същото отношение намираме $\frac{t_k}{t_0} \approx 0{,}45$, т.е. почти половината от времето за целия полет играчът се намира с точност от 20 % около върха на траекторията си. Именно този факт създава впечатлението, че играчът "зависва" неподвижен във въздуха и има време да се прицели към коша. Така, ако максималната височина на отскока е h = 1 m, според (1) общото време, прекарано във въздуха, е $t_0 = 2\sqrt{\frac{2.1}{10}} \approx 0{,}9$ s, а според (3), времето за полета на височина над 80 cm, е над 0,4 s.

На фиг. 1 е показана графиката на функцията (3). Видът на кривата обяснява



Фиг. 1.

защо играчът прекарва относително повече време на по-голяма височина. Вижда се например, че наистина на височина над 0,5h той прекарва повече от 70 % от времето на полета.

Забележително е, че отношението (3) не зависи нито от максималната височина, нито от ускорението на свободното падане – факти, които позволяват да се правят интересни заключения.

И така, ако желаете да заинтригувате учениците с подобна задача, формулирайте я така:

За да шутира от голямо разстояние, баскетболист отскача на височина 1 m. С колко време разполага играчът за прицелване към коша, ако можем да смятаме, че той е неподвижен, когато се намира на височина поне 80 cm над земята?

Разбира се, формулирайки задачата така, не сме съвсем коректни, защото играчът може да започне да се прицелва или поне – да се подготвя за шутиране, и преди да “зависне” във въздуха.