Накъде ще тръгне колелото?

Следващият пример за прилагане метода на екстремните стойности е интересен и с това, че предоставя възможност за преход от качествени към количествени разглеждане.

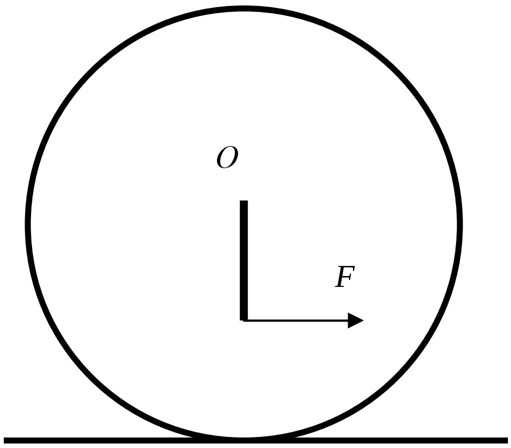
Задача. Единият педал на детски триколесен велосипед е в най-ниско положение. Накъде ще тръгне велосипедът, ако детето:

А) седи на велосипеда и натисне с крак педала напред?

Б) стои встрани от велосипеда и натисне с ръка педала напред?

Анализ. Не е необходимо човек да е учил физика, за да съобрази, че в случай А) цялата система (детето с колелото) ще тръгне назад. Не така очевиден е отговорът на въпроса в случай Б).

Преди всичко да изчистим ситуацията – велосипедът е необходим само за нагледност. Задните колела в случая са пасивни, те служат само за осигуряване на стабилност – гарантират, че предното колело остава във вертикална равнина. Затова се абстрахираме от конструкцията на велосипеда и разглеждаме вертикално колело върху хоризонтална повърхност, към оста на което е прикрепен насочен вертикално надолу лост (фиг. 1).



Фиг. 1.

Ако колелото не се опира на повърхността, а оста му е фиксирана, насочената надясно сила F би го завъртяла обратно на посоката на въртене на часовата стрелка. Наличието на хоризонталната равнина е причина за поява на **сила на триене в покой**. В нашия случай тази сила е насочена назад (триенето в покой е насочено винаги противоположно на силата, която предизвиква движението[1]) и създава въртящ момент, насочен противоположно на момента, дължащ се на силата F. Ето защо посоката на завъртане на колелото зависи от съотношението между двата въртящи момента.

Качествено решение

Случай А). Когато седи върху велосипеда, детето и велосипедът образуват *една* система. Силата F, с която детето натиска педала напред, е вътрешна за системата сила и тя се уравновесява с противодействието ($-F$), приложено върху детето (трети принцип на Нютон). Движението на системата се определя от единствената външна сила – насочената назад сила на триене в покой. Ето защо в този случай велосипедът тръгва **назад** – случаят е аналогичен с движението на автомобил, което също се осъществява под въздействие на вътрешна сила с източник – двигателя, като в края на краищата движението е в посока на силата на триене в покой между гумите и настилката.

[1] Вж. напр. файла triene_v_pokoy.pdf .

Случай Б). В този случай системата – тя състои само от велосипеда, а детето е външно тяло, източник на *външната* сила F. Решението може да използва факта, че накъдето и да се върти колелото, моментната скорост на точката, в която то контактува със "земята" е нула (няма приплъзване). Ако разглеждаме тази точка като моментен център на въртене на цялото колело, спрямо нея рамото на триенето в покой е нула и то не влияе на посоката на въртене. А понеже в този случай силата F се стреми да завърти колелото около неподвижния център по часовата стрелка, то следва, че в този случай колелото ще тръгне **напред**.

Количествено решение за случай Б). Нека с R означим радиуса на колелото, с r – дължината на педала и с m – масата на колелото. Съответно с F, f и a означаваме проекциите на приложената върху педала сила, на силата на триене при покой и на линейното ускорение на оста на колелото върху хоризонталната посока, в която действаме върху педала. (това означава, че $F > 0$, а тъй като не познаваме посоката на триенето в покой, знакът на f за сега е неопределен).

Ускорението на центъра на колелото се подчинява на втория закон на Нютон:

(1) $$F + f = ma\ ,$$

в което обаче фигурира неизвестната сила на триене при покой f. За да я елиминираме, използваме основното равнение на динамиката на въртеливото движение, според което сборът от въртящите моменти, действащи на едно твърдо тяло, е равен на инерчния момент I на тялото, умножен с ъгловото ускорение ε, пресметнато спрямо точката, спрямо която са пресметнати и въртящите моменти. В случая тази точка е центърът на колелото. Въртящите моменти на двете сили са съответно Fr и fR, така че основното уравнение има вида:

(2) $$Fr + fR = -I\varepsilon\ .$$

Знакът минус в дясната страна се появява поради следната причина: линейното и ъгловото ускорения са свързани винаги с познатата връзка:

(3) $$\varepsilon = \frac{a}{R},$$

което означава, че знаците им са еднакви. Според направената по-горе уговорка, $a > 0$, т.е. линейното ускорение е положително, когато т.O се движи надясно и колелото се върти **по** часовата стрелка. Ако обаче F и f са положителни, силите се стремят да завъртят колелото в обратната посока – това е и причината за появата на знака минус в дясната страна на (2).

Като елиминираме в (2) ε чрез (3) и f чрез (1), и решим полученото равенство спрямо a, получаваме:

(4) $$a = \frac{R(R-r)}{I + mR^2}F\ .$$

Тъй като $R > r$, то и $a > 0$, т.е. наистина колелото ще тръгне надясно!

Коментари:

1. От формула (4) следва, че:

– ако педалът е по-дълъг от радиуса на колелото ($r > R$), то $a < 0$. В този случай колелото ще тръгне *назад*;

– ако радиусът на колелото е равен на дължината на педала ($r = R$), то $a = 0$ и колелото няма да помръдне (в случай, разбира се, че големината на F, не превишава максимално възможната сила на триене при покой).

2. Ако заместим a от (4) в (1) и решим полученото равенство спрямо f, получаваме:

$$f = -\frac{I + mrR}{I + mR^2}F\ .$$

Тази формула показва, че силата на триене в покой първо, е винаги обратно насочена на приложената към педала сила и, второ – дали големината й е по-малка или по-голяма от F, зависи от дължината на педала. В реалния случай, когато педалът е по-къс от радиуса на колелото, големината на триенето в покой е по-малка от големината на приложената върху педала сила.