Удар на тухла върху асансьор

Следната задача предоставя добри възможности за различни качествени разглеждания, за получаване на решение на полу-количествено равнище с прилагане на метода на екстремните стойности и, накрая – за последваща количествена проверка на верността му. С други думи, отново *от качествени към количествени разглеждания*, но този път с една междинна стъпка.

Задача. От тавана на асансьорна шахта се откъртва тухла и полита надолу. В кой случай пораженията върху кабината ще бъдат най-големи: а) когато тя е неподвижна; б) когато се издига нагоре; в) когато се спуска надолу? (Предполага се, че движенията на асансьора нагоре и надолу са равномерни и с еднакви скорости.)

Качествено разглеждане. Големината на последствията от удара зависи от относителната скорост на тухлата спрямо асансьора – при по-голяма относителна скорост пораженията биха били по-големи. Когато асансьорът се спуска, тухлата го настига и нейната относителна скорост е **разлика** от големините на скоростите им спрямо земята. Когато пък асансьорът се издига, в момента на удара относителната скорост на тухлата спрямо кабината е **сума** от големините на скоростите им спрямо земята. При неподвижен асансьор относителната скорост на тухлата спрямо него е равна на скоростта й спрямо земята.

Ако спрем с разсъжденията дотук, би трябвало да очакваме, че пораженията ще бъдат най-малки, когато асансьорът се спуска и най-силни – когато се издига. Малко по-дълбоко вникване в ситуацията обаче разкрива и друга тенденция. Наистина, когато асансьорът се издига, той пресреща тухлата, изминатото от нея разстояние се скъсява, с което намалява и скоростта, придобита при свободното падане. Това би следвало да намали силата на удара. Обратно – когато асансьорът се спуска, на тухлата е необходимо повече време, за да го настигне, следователно тя придобива по-голяма скорост спрямо земята и това като че ли би трябвало да увеличи силата на удара.

Ясно е, че и двата типа съображения са правилни и тъй като водят да противоположни очаквания, само по-подробното разглеждане може да покаже кое от тях превалира.

Полу-количествено решение. Тази задача е интересна с това, че чрез прилагане метода на екстремните стойности, допуска решение на едно полу-количествено равнище. За да го намерим, ще направим разглеждането спрямо отправна система с начало в т. O, намираща се на тавана на асаньорната шахта и с вертикална ос Oy, насочена надолу. Разстоянието от т. O до тавана на асансьора в началния момент – момента на откъртване на тухлата, означаваме с H, земното ускорение, както обикновено – с g, а големината на константната скорост, с която се спуска или издига асансьорът – с v. Ще търсим относителната скорост u_r на тухлата спрямо кабината в трите, посочени в условието случая.

Нека първо разгледаме случай а) – неподвижен асансьор ($v = 0$). Както бе отбелязано по-горе, в този случай търсената относителна скорост е просто равна на скоростта $u = \sqrt{2gH}$, която едно тяло придобива при свободното си падане от височина H. С други думи в този случай относителната скорост е

(1) $$u_r = \sqrt{2gH} .$$

В случай б) асансьорът се движи нагоре. Нека разгледаме ситуацията при екстремна стойност за скоростта му – когато v е много по-голяма от определената от (1) стойност, т.е. при $v >> \sqrt{2gH}$. Интуитивно ясно е, че при това условие самата кабина ще достигне тавана на шахтата преди още тухлата да успее да придобие някаква скорост. Т.е. – в този случай в момента на удара скоростта на тухлата спрямо земята може да се пренебрегне и големината на относителната и скорост $u_r^{'}$ ще бъде просто равна на скоростта на асансьора:

(2) $$u_r^{'} \approx v >> \sqrt{2gH} \ .$$

Сравнението между (1) и (2) показва, че в този случай пораженията ще бъдат по-големи, отколкото в случай а).

В случай в) асансьорът се спуска. Да приложим отново метода на екстремните стойности – нека отново скоростта му е много по-голяма от определената с (1) скорост u_r, т.е. отново $v >> \sqrt{2gH}$. В този случай на тухлата ще е необходимо много повече време за застигане на кабината, изминатия от нея път ще бъде много по-голям от H и следователно можем да смятаме, че пътищата на двете тела са приблизително равни. Ако означим с t момента на удара, пътят на кабината е vt, а на тухлата – $\frac{1}{2}gt^2$. Като приравним двете величини, съкратим на t и отчетем, че $u = gt$ е точно скоростта на тухлата в момента на удара, получаваме $u \approx 2v$. И тъй като сега търсената относителна скорост е *разлика* от скоростите на двете тела, за големината й получаваме:

(3) $$u_r^{''} = u - v \approx 2v - v = v >> \sqrt{2gH} \ .$$

Заключението е, че и в този случай пораженията ще бъдат по-големи, отколкото върху неподвижен асансьор.

И тъй като няма физични съображения, от които да следва, че при междинни (т.е. – не екстремни) големини на скоростта на асансьора относителната скорост би имала минимуми или максимуми, можем да заключим, че тухлата ще нанесе най-малки поражения върху кабината, когато последната е неподвижна. С други думи, верният отговор на задачата е а).

От сравнението на (2) и (3) следва, че поне при големи стойности на скоростта на асансьора, относителната скорост при удара *не зависи* от това, дали той се издига или спуска. Дали това е така и при произволна големина на скоростта, може да покаже само пълното количествено решение на задачата.

Количествено решение. Тъй като направените разсъждение (особено за случая на спускащ се асансьор) може да се сторят някому неубедителни, прилагаме и точното количествено решение на задачата.

При вече използваните означения законът за движение на асансьора е:

(4) $$y_1 = H \pm vt \ ,$$

като горният знак се взема при спускане, а долният – при издигане. В същото време от закона за свободното падане за закона на движение на тухлата имаме:

(5) $$y_2 = \frac{1}{2}gt^2 \ .$$

Тъй като при удара е изпълнено равенството $y_1 = y_2$, чрез приравняване на десните страни на (4) и (5) получаваме, че моментът на удара t_0 е решение на уравнението:

(6) $$\frac{1}{2}gt^2 \mp vt - H = 0 \ .$$

Неговото единствено положително решение е:

(7) $$t_0 = \frac{1}{g}\left[\pm v + \sqrt{v^2 + 2gH}\right].$$

При това положение в момента на удара скоростта u_0 на тухлата е:

(8) $$u_0 = gt_0 = \pm v + \sqrt{v^2 + 2gH} \ ,$$

като помним, че горният знак е за спускащ се асансьор, а долният – за асансьор, който се издига.

С помощта на (8) за относителната скорост u_r'' на тухлата спрямо асансьора при движението му *надолу* в момента на удара получаваме:

(9) $$u_r'' = u_0 - v = v + \sqrt{v^2 + 2gH} - v = \sqrt{v^2 + 2gH} \ .$$

Същата стойност за относителната скорост получаваме обаче и при издигане на асансьора:

(10) $$u_r' = u_0 + v = -v + \sqrt{v^2 + 2gH} + v = \sqrt{v^2 + 2gH} \ .$$

Сравненията на формулите (1), (9) и (10) показват, че наистина пораженията от удара ще бъдат най-малки, когато асансьорът е неподвижен (при $v = 0$). Освен това от (9) и (10) следва, че наистина големината на относителната скорост при удара не зависи от това, дали асансьорът се издига или спуска. Следователно ефектите от двете противоположни тенденции, които се очертаха при качествения анализ на задачата, се **компенсират точно**! Интересно е дали до това заключение не може да се стигне чрез подходящи качествени разсъждения (напр. чрез използване на някаква симетрия).

За какво всъщност говорим? Като логика разгледаната задача несъмнено представлява някакъв интерес и решението й (особено полу-количественото) съдържа определена красота. Не е излишно обаче, както и в други случаи, да си зададем въпроса за какво всъщност става дума, т.е. – доколко полученият резултат има отношение към действителността. Скоростта на асансьорите в нашите жилищни блокове е от порядъка на 1 m/s. Минималното разстояние от тавана на кабината до тавана на шахтата (т.е., когато асансьорът е спрял на най-горния етаж) е от порядък на 1 m. Следователно отношението между v^2 и $2gH$ е от порядъка на 1/20, т.е. – представлява малка величина. Тогава от (1) и (10) получаваме:

$$\frac{u_r'}{u_r} = \sqrt{1 + \frac{v^2}{2gH}} \approx 1 + \frac{1}{2} . \frac{v^2}{2gH} = 1 + \frac{1}{2} . \frac{1}{20} = 1{,}025 \, .$$

Това означава, че ако при пресмятане на относителната скорост при удара пренебрегнем движението на самия асансьор, грешката няма да надминава 3%! И това – при положение, че в началния момент асансьорът е спрял на най-горния етаж. Ако асансьорът е по-ниско (по-голямо H), грешката е още по-малка.