Хвърлена нагоре топка

Може би един от най-елегантните примери за прилагане на енергетичния подход е доказателството, че ако отчитаме съпротивлението на въздуха, времето за издигане на хвърлена нагоре топка е по-малко от времето за падането й на земята.

Доказателството се опира на две елементарни предпоставки:

1. Въздушното съпротивление е винаги в посока, противоположна на посоката на скоростта на движение. Ето защо работа на тази сила е винаги отрицателна, поради което механичната енергия на топката с времето намалява **непрекъснато**.

2. През всяка точка на траекторията топката минава два пъти – първо при движение нагоре, след това – надолу. И в двата случая обаче нейната гравитационна потенциална енергия е **една и съща**, защото зависи само от височината над земната повърхност, но не и от големината или посоката на скоростта.

Тъй като движението нагоре предхожда падането, от 1. следва, че във всяка точка от траекторията механичната енергия при падането е по-малка, отколкото е била при издигане. И понеже според 2. гравитационната потенциална енергия в определена точка е една и съща, следва заключението, че кинетичната енергия и скоростта на топката в тази точка при падането е по-малка, отколкото при издигането. Пътят обаче и в двата случая е еднакъв и равен на максималната достигната от топката височина. Ето защо времето за изминаване на този път е по-кратко при движение нагоре – тогава, когато скоростта е по-голяма.

В правилността на направения извод може да се убедите, като хвърлите нагоре птиче перце: то бързо достига най-високата точка от траекторията си , след което доста по-продължително плавно се рее към земята.

Наистина, доказателството е и просто, и елегантно. Нека обаче опитаме да оценим за какво всъщност става дума, да намерим критерий, който казва кога можем да пренебрегнем съпротивлението на въздуха и кога трябва да го отчитаме. Ако, например, хвърлим топка за тенис и тя достигне височина 5–6 m, ще успее ли някой с хронометър в ръка да засече разликата в двете времена – на издигане и на падане?

Оценка за силата на съпротивление на въздуха. Нека с помощта на **анализа на размерностите** оценим големината на съпротивлението на въздуха. Както се прави при този анализ, в началото трябва да решим, кои фактори определят въпросната сила. Те са два вида – едни, които зависят от движещото се тяло и други, зависещи от средата, в която става движението.

Измежду първите със сигурност участват скоростта на движение v, а също така формата и размерите на тялото. В нашия случай формата е определена (сфера), а интуицията подсказва, че вместо радиус (диаметър), по-естествено е да работим с максималното напречно сечение на топката S. Би ли могло съпротивлението на въздуха да зависи от масата на топката? За да отговорим на този въпрос, ще се позовем на следното антропоморфно[1] разсъждение: когато едно тяло лети, въздухът, който му оказва съпротивление, няма как да знае дали то е кухо или плътно, т.е. съпротивлението не би трябвало да зависи от масата на топката, а следователно – и от нейната плътност. Разбира се, съпротивлението със сигурност се влияе и от такива фактори, като вида на повърхността на тялото – една гладка и една мъхната (като тенисна) топка при равни други условия би трябвало да изпитват различно съпротивление[2]. Отново интуицията подсказва обаче, че влиянието на тези фактори трябва да води до малки ефекти, или, както се казва – до поправки от втори порядък.

---

[1] Антропоморфизъм – приписване на човешки качества на неодушевени тела, на природни явления и т.н.

[2] Професионалистите–тенисисти добре знаят, че има съществена разлика между играта с нова топка и играта с многократно използвана топка, чието покритие е изтрито и е много по-гладка. Освен това, ако сте виждали топче за голф, сигурно сте обърнали внимание, че, при диаметър от около 45 mm,

Въздухът би могъл да влияе върху силата на съпротивление посредством своята плътност ρ – в по-рядък въздух съпротивлението сигурно ще бъде по-малко.

Същността на метода на размерностите изисква да намерим такава комбинация от трите фактора ρ, *S* и *v*, която има размерност на сила. За целта използваме традиционните означения за размерностите на трите основни механични величини: L – за размерността на дължината, T – за размерността на времето и M – за размерността на масата. В тези означения от втория закон на Нютон $F = ma$ за размерността на силата следва $[F] = MLT^{-2}$, а размерностите на останалите величини са съответно: $[S] = L^2$, $[\rho] = ML^{-3}$, $[v] = LT^{-1}$. Ние търсим такава комбинация от степени на ρ, *S* и *v*, която има размерност на сила:

$$[F] = [\rho]^k[S]^l[v]^m,$$

т.е. числата *k*, *l* и *m* трябва да определим така, че да бъде изпълнено равенството:

$$MLT^{-2} = (ML^{-3})^k(L^2)^l(LT^{-1})^m.$$

Чрез приравняване поотделно на степенните показатели на M, на L и на T от лявата и от дясната страна на последното равенство, получаваме три уравнения с три връзки:

$$1 = k$$
$$1 = -3k + 2l + m$$
$$-2 = -m,$$

от които следва $k = 1$, $l = 1$, $m = 2$.

И така, анализът на размерностите води до модел, в който съпротивлението на въздуха се описва с формула от вида:

(1) $$F = C\rho Sv^2,$$

Където *C* е безразмерен коефициент, най-вероятно от порядъка на единица, чиято стойност зависи най-вече от формата на тялото.

Формула (1) дава възможност веднага да обясним защо при равни други условия във въздуха по-тежките тела падат по-бързо. Наистина, ускорението *a* на тяло с маса *m* се определя от уравнението за движение:

$$ma = mg - kv^2,$$

където *k* е коефициент, който зависи от формата и размерите на тялото, а *g* – земното ускорение. Оттук следва:

$$a = g - \frac{k}{m}v^2,$$

т.е. наистина по-тежкото от две тела с еднаква форма и размери пада с по-голямо е ускорението. Разбира се, този извод важи до момента, в който скоростта не нарасне до стойността, при която ускорението стане нула. За по-тежкото тяло тази скорост е по-голяма и, както ще видим по-надолу, наистина е пропорционална на $\sqrt{m}$.

Решението на уравнението на движение при сила, описвана с формула (1), е относително сложно[3]. Ние обаче търсим само оценъчен критерий, който да ни ориентира кога трябва да отчитаме съпротивлението на въздуха и кога може да го пренебрегнем. Доколкото времената на издигане и падане зависят от скоростите, а те от

повърхността му е равномерно осеяна с разположени една до друга повече от сто плитки кръгли ямки – оказва се, че по отношение на въздушното съпротивление в случая подобна повърхност е най-благоприятна.

[3] Точното решение за пътя *s* при свободно падане на тяло с маса *m* и с отчитане съпротивлението на въздуха се описва с формулата $s = a\ln\left[\cosh\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}\right)\right]$, където $a = \frac{m}{CS\rho}$ е константа с размерност на дължина.[G. Grimvall, с. 98]

своя страна – от намаляващата механична енергия на тялото, ще отчитаме влиянието на съпротивлението чрез промените на тази енергия.

Нека си представим, че хвърлим нагоре топка с маса m и начална скорост v_0, т.е. придадем на топката енергия $E_0 = \frac{mv_0^2}{2}$. В първо приближение ще приемем, че когато относителното намаляване на механичната енергия е малко, т.е. при $\frac{\Delta E}{E_0} << 1$, при движение нагоре в точка от траекторията, намираща се на височина x над земната повърхност, големината на скоростта се определя от закона за запазване на енергията:

(2) $$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgx, \text{ т.е. } \qquad v^2 = v_0^2 - 2gx .$$

Като заместим v^2 от формула (2) в (1), за зависимостта на силата на съпротивление от височината над земната повърхност получаваме:

(3) $$F = C\rho S(v_0^2 - 2gx) .$$

Графиката на тази функция е част от права с отрицателен ъглов коефициент. Работата A на съпротивлението на въздуха по време на издигането, т.е. големината на намаление на механичната енергия ΔE, е равна на площта на триъгълника с височина $C\rho S\, v_0^2$ и основа $h = \frac{v_0^2}{2g}$ – максималната височина, до която се издига тялото в отсъствие на съпротивление. В случая тази площ е:

$$\Delta E = A = \frac{1}{2}Fh = \frac{1}{2}C\rho S v_0^2 h = C\rho S\frac{E_0}{m}h .$$

Така в първо приближение за относителното намаление на механичната енергия при движение нагоре намираме израза:

(4) $$\frac{\Delta E}{E_0} = C\frac{\rho S h}{m} .$$

Тази формула илюстрира две интуитивно разбираеми зависимости:

– колкото по-тежка е топката (при равни други условия), толкова по-слабо е влиянието на съпротивлението на въздуха върху движението й;

– колкото по-голяма е височината, до която достига топката, толкова по-осезаема ще става разликата между времето за достигане на връхната точка от траекторията и времето за обратно падане на земята.

Интересно е, че величината $m' = \rho Sh$ има ясен физичен смисъл – това е масата на въздуха, изпълващ цилиндъра, в който се движи топката до достигане на най-високата точка от траекторията. Следователно можем да кажем, че влиянието на съпротивлението е пренебрежимо, когато масата на този въздух е малка спрямо масата на топката.

Тъй като в различните случаи е трудно да се прецени колко е масата на въздуха във въпросния цилиндър, по-удобно е от формула (4) да извлечем друг критерий. Достатъчно е да забележим, че величината:

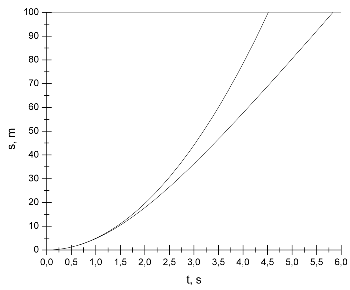
(5) $$H = \frac{m}{C\rho S}$$

има размерност на дължина. Тогава можем да кажем, че съпротивлението на въздуха може да се пренебрегне, ако максималната височина на издигане на топката е много по-малка от H, т.е. ако е изпълнено условието:

(6) $$h << H.$$

Като отчетем, че плътността на въздуха е ρ = 1,2 kg/m^3 и пресметнем H за тенисна топка (маса m = 58 g и площ на напречното сечение S = 33 cm^2), при C = 1 намираме $H \approx 15$ m. Според критерия (6) съпротивлението на въздуха при движението на топката може да се пренебрегне, когато максималната височина на издигане е значително по-малка от 15 m. (На практика се оказва, че нашето приближение е твърде грубо и получената оценка – занижена.) Това означава, че хронометърът няма да ни помогне да установим разликата между времето за издигане и на падане на топката, ако тя се издигне само до 5–6 m височина. (Измерването се усложнява и от факта, че в момента на хвърляне топката е на някаква височина над земята, а моментът на падане обикновено се отчита, когато тя достигне земята.)

Двете графики на фиг. 1 представят зависимостта от времето на пътя, изминат от тенисната топка при свободно падане (по-стръмната крива), и пътя, изминат при отчитане съпротивлението на въздуха по цитираната под черта по-горе точна формула. Вижда се, че през първите 1,5 s двете криви са практически неразличими. Времената за преминаване през 20-тия метър се различават с малко повече от 0,1 s, т.е. закъснението, предизвикано от съпротивлението на въздуха е под 6 % от времето за свободно падане, но при 100-ния метър това закъснение вече е около 30 %.



Фиг. 1.

Направените разглеждания илюстрират една типична за работата на физиците черта: когато са изправени пред сложен проблем – те търсят величини (времена, дължини, маси и т.н.), които са характеристични за проблема и сравнението с които позволява да отсеят съществените от несъществените фактори във всеки конкретен случай. Макар и груб, нашият анализ на движението на топката позволи да намерим такава величина – в този случай това е височината H.

Да сме забравили нещо? Когато в началото разсъждавахме върху факторите, които могат да влияят върху силата на съпротивление, не споменахме вискозитета на въздуха. Който е учил университетска физика и е по-паметлив, може да се спомни, че комбинацията (1) не е единствената, която има размерност на сила: съществува една формула на Стокс, според която при движение със скорост v във флуид с вискозитет η сфера с радиус r изпитва съпротивление $F = 6\pi\eta r v$ – сила, пропорционална не на v^2, а само на v. Защо дотук не отчитахме наличието на такава сила?

Отговорът на този въпрос е по-сложен. Дали съпротивлението е пропорционално на v или на v^2, зависи от стойността на т.нар. *число на Рейнолдс*, което се определя с формулата:

(7) $$\mathrm{Re} = vL\rho/\eta\,,$$

в която флуидът участва със своите плътност ρ и вискозитет η, а тялото – със своята скорост v и параметъра L – един негов характеристичен размер. Когато Re < 1, потокът на флуида е ламинарен и силата на съпротивление е правопропорционална на v. В интервала 1 < Re < 10 става преход към турбулентно обтичане на тялото и при 10 < Re се приема, че съпротивлението вече е пропорционално на v^2.

За да видим при какви скорости на тенисната топка определяща е стоксовата сила на съпротивление, решаваме (7) спрямо v при Re = 1, като имаме предвид, че вискозитетът на въздуха е η = 1,72.10^{-5} Pa.s, а диаметърът на топката – ≈ 65 mm:

$$v = \frac{\eta}{L\rho}\mathrm{Re} = \frac{1{,}72.10^{-5}}{0{,}065.1{,}2}.1 \approx 0{,}2\ \mathrm{mm/s}.$$

Тъй като едно свободно падащо тяло придобива подобна скорост за само няколко десетки микросекунди, ясно е, че отчитането на стоксовата сила е безсмислено.

А изтласкващата сила на Архимед? При досегашните разглеждания не отчитахме и действието на Архимедовата сила. За разлика от силата на съпротивление, тази сила не променя нито големината, нито посоката си – насочена е винаги нагоре и, действието й, ако трябва да се отчита, ще се сведе до ефективно намаляване на стойността на g – и времето за издигане, и времето на падане ще се увеличат.

Въпросът е: трябва ли да се отчита Архимедовата сила при движението на тенисната топка? За да отговорим, трябва да я сравним със тежестта на топката, която е Mg = 0,058.9,8 ≈ 0, 57 N. В същото време теглото на изместения от топката въздух, т.е. Архимедовата сила, е:

$$F_A = \rho V g = \rho g \frac{4}{3}\pi R^3 = 1{,}2.9{,}8.\frac{4}{3}3{,}14.0{,}033^3 = 0{,}0018\ \mathrm{N}.$$

Ясно е, че доколкото в случая на тенисната топка Архимедовата сила е под 0,4 % от силата на тежестта, няма никакъв смисъл да разглеждаме влиянието й върху движението – в сравнение с влиянието на въздушното съпротивление то е нищожно.

Разбира се, освен тенисни топки, във въздуха се движат и други тела и за движението на някои от тях Архимедовата сила със сигурност трябва да се отчита. Такова тяло е например едно надуто детско балонче. Очевиден критерий за това трябва или не трябва да се отчита влиянието на Архимедовата сила е отношението между нея и силата на тежестта, действаща на тялото:

$$\frac{F_A}{mg} = \frac{\rho V g}{mg} = \frac{\rho V}{m}.$$

Ако тялото с маса m е хомогенно, очевидно това отношение се свежда до отношение между плътността на въздуха и плътността на тялото и доколкото твърдите тела и течностите са с кръгло 1000 пъти по-голяма плътност от плътността на въздуха, влиянието на Архимедовата сила върху движението им във въздух с точност от около 0,1 % може да се пренебрегне.

Пределна скорост на падащо във въздуха тяло. Чрез формула (1) можем да получим оценка за максималната скорост, която едно тяло придобива при падане във въздуха – това е скоростта, при която големините на силите на тежестта и на съпротивлението на въздуха се изравняват:

$$mg = C\rho S v^2.$$

Оттук следва:

$$v = \sqrt{\frac{mg}{C\rho S}}, \tag{8}$$

т.е. наистина $v \sim \sqrt{m}$, както предсказахме още в началото въз основа на уравнението на движение.

От формула (8) за тенисната топка получаваме, че максималната скорост, която може да придобие при падане във въздуха, е от порядъка на 12 m/s. По-добра оценка (24 m/s) бихме получили, ако използваме не C = 1, а C = 0,25 – стойност, близка до това, което показва опитът. Това означава, че топката би достигнала максималната си скорост само 2 – 3 секунди след началото на падането.

По подобен начин за човек с маса 60 kg и площ 0,5 m^2 получаваме, че максималната скорост, която може да придобие при падане е от порядъка на 60 m/s, т.е. малко над 200 km/h.

Дъждовна капка с диаметър 2 mm има масса около 4.10^{-6} kg и за нея максималната скорост се получава около 5 – 6 m/s. За водните капки в облаците обаче, където размерите им са примерно 100 пъти по-малки, формула (8) вече е неприложима – за тях числото на Рейнолдс е твърде малко, приближението $F \sim v^2$ – твърде грубо и следва да се отчита влиянието на вискозитета на въздуха[4].

Още един проблем. Съществува един проблем, свързан с движението на хвърлено нагоре тяло, който не намира отговор в рамките на направените дотук разглеждания. Проблемът е: времето за движение на тялото нагоре при отчитане съпротивлението на въздуха по-малко ли е, или е по-голямо от времето, когато съпротивлението е пренебрежимо малко? Въпросът не е тривиален – вярно е, че във всяка точка от траекторията скоростта при отчитане на съпротивлението е по-малка, но в този случай и пътят (максималната височина на издигане) е по-къс, така че наистина не може чрез прости разсъждения да се съди за съотношението между времената.

Интересно е, че отговор все пак може да се получи, без да се решават уравнения на движение.

Нека първо в координатна система с насочена нагоре вертикална ос разгледаме движението на топка с маса m, хвърлена от земята със скорост v, когато съпротивлението на въздуха се пренебрегва. Единствената действаща сила е тежестта на топката, чиято проекция върху въпросната ос е отрицателна: $-G$. При това положение вторият закон на Нютон може да се запише във вида:

(9) $$m\Delta v = -G\Delta t\,,$$

където Δt е малък интервал време, през който скоростта претърпява промяна Δv. Равенства, подобни на (9), може да се запишат за всички малки интервали време, на които можем да разделим интервала време t_0 за движение на топката нагоре. Ако сумираме всички подобни равенства и отчетем, че силата на тежестта е една и съща, в дясно ще получим просто $-Gt_0$. В лявата страна, където m също е едно и също за всяко събираемо, сумирането на всички Δv дава общата промяна на скоростта. Тъй като началната скорост е v, а крайната – 0, тази обща промяна е $-v$. По такъв начин лявата страна на сумираните равенства от типа (9) е $-mv$, така че общо получаваме:

(10) $$mv = Gt_0.$$

В случая, когато на топката действа и съпротивлението F на въздуха (независимо от какво и как зависи то), проекцията на втория закон на Нютон върху вертикалната ос има вида:

(11) $$m\Delta v = -G\Delta t - F\Delta t\,,$$

където $F > 0$. Физичният смисъл на събираемото $-F\Delta t$ е ясен – това е импулсът на силата на съпротивление за малкия интервал Δt. Като сумираме отново всички равенства от типа (11), в лявата страна отново ще получим $-mv$, сумата на първите членове в дясно ще даде $-Gt$, където в този случай t е времето за движение нагоре. Сумата на всички членове от типа $F\Delta t$ означаваме с $J > 0$ – това е общият импулс на силата на съпротивление по време на движението.

По този начин получаваме, че при отчитане на съпротивлението на въздуха е в сила съотношението

(12) $$mv = Gt + J\,.$$

Сравнението с (10) и отчитането на факта, че $J > 0$, водят до заключението, че $t_0 > t$, т.е. съпротивлението на въздуха не само намалява височината на издигане – то скъсява и времето за достигане на максималната височина (въпреки че, общо взето, и скоростта е по-малка).

---

[4] По въпроса вж. и файла Almanah-pdf\I chast\5 razni\28 oblaci