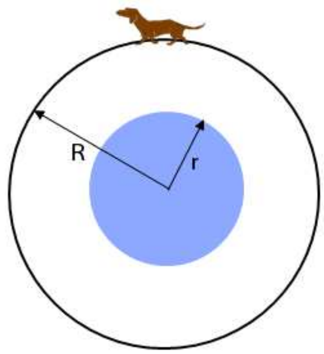
Класика 3 – отново за кучето-пазач

Под заглавие "Класика 2 – куче пазач" поместихме една класическа задача, съществeният елемент при решаване на която е досещането (необходимите формули от кинематиката и математичните преобразования са повече от елементарни). Тук се връщаме към същата задача, но в един по-общ вид, която може да се решава независимо от предишната.

Задача. Намирате се в центъра на кръгъл парк, от който искате да излезете. Паркът обаче се охранява от зло куче (вж. фиг.). Добрата новина е, че кучето е привързано за оградата така, че може само да обикаля по нея, като във всеки момент се стреми да скъси разстоянието до вас. Лошата новина е, че неговата скорост v е по-голяма от скоростта, с която можете да бягате вие. Пита се: колко е минималната скорост, при която все още можете да напуснете парка, без да ви се налага да се разправяте с кучето?



Анализ. Лесно се съобразява, че такава минимална скорост със сигурност съществува. Наистина, ако можете да бягате със скоростта на кучето и се отправите към точката от оградата, противоположна на неговото местоположение, вие ще трябва да изминете път R, докато пътят на кучето е πR, т.е. значително по-дълъг – ясно е, че вие ще го изпреварите и ще напуснете парка необезпокояван. Нещо повече – дори да бягате π-пъти по-бавно от кучето (т.е. ако скоростта ви е равна на v/π), вие ще стигнете оградата заедно с него, защото и на вас, и на кучето за това ще е необходимо време $\frac{\pi R}{v}$. Следователно, ако можете да бягате със скорост, малко по-голяма от v/π, нямате проблем с излизането от парка.

Въпросът е дали наистина v/π е търсената минимална скорост? Отговорът би бил "да", ако оптималната тактика за вас е да бягате в посока, противоположна на посоката към кучето. (Тактиката на кучето е фиксирана в условието – във всеки момент то бяга така, че да скъсява разстоянието до вас.) Съществуват обаче и други възможности – например, по някакъв начин предварително (т.е. – преди да хукнете към оградата) да увеличите разстоянието от вас до кучето и същевременно да доближите оградата. Това може да се постигне, като първо тръгнете към кучето. Следвайки своята тактика, то ще стои неподвижно. Отдалечете се от центъра на такова разстояние r, че като започнете да бягате по окръжност с този радиус, ъгловата ви скорост да бъде равна на ъгловата скорост v/R, с която кучето може да обикаля по оградата. Когато вие започнете да бягате по малката окръжност, за да скъси разстоянието до вас, кучето ще започне за бяга в същата посока около оградата. Ако обаче вие бягате по окръжност с малко по-малък от r радиус, ъгловата ви скорост ще бъде малко по-голяма от тази на кучето. В този случай ъгълът, който описвате по вашата окръжност, ще расте по-бързо от ъгъла, описан от кучето по оградата. Ако бягате достатъчно дълго време, вие ще изпреварите кучето с ъгъл π. В този момент вие и кучето се намирате върху един диаметър, като разстоянието от вас до него е $(R + r)$, а разстоянието от вас до оградата –

($R-r$). Така целта е постигната – както и преди, вие и кучето сте на един диаметър, но сега сте по-близо до оградата и по-далече от него, отколкото в началото. Ясно е, че ако в този момент смените посоката на скоростта си и се насочите към най-близката точка от оградата, ще я достигнете преди кучето, дори и скоростта ви да е по-малка от v/π. Въпросът, който остава нерешен, е: **колко по-малка**?

Решение. След като тактиката е изяснена, решението е елементарно. Да означим с λ отношението между вашата скорост и скоростта на кучето, т.е. вие можете да бягате със скорост λv. Търсеното число $\lambda < 1$ е безразмерно и очевидно не може да зависи нито от скоростта v, нито от радиуса R на оградата (от двете величини v и R не може да се образува безразмерна комбинация).

Преди всичко трябва да определим радиуса r на окръжността, по която трябва да бягате. Той се намира от условието за равенство между двете ъглови скорости – вашата и на кучето:

$$\frac{\lambda v}{r}=\frac{v}{R}\text{, откъдето намираме } r=\lambda R.$$

Следователно, след като разликата от описаните от вас и от кучето ъгли стане равна на π, разстоянието от вас до оградата е $R-r=R(1-\lambda)$, а разстоянието, която трябва да пробяга кучето, за да ви пресрещне, както и преди – πR. Коефициентът λ намираме чрез приравняване на времената, необходими за изминаване на тези разстояния със скорости съответно λv и v:

$$\frac{R(1-\lambda)}{\lambda v}=\frac{\pi R}{v},$$

откъдето следва $\lambda=\dfrac{1}{1+\pi}$.

Разбира се, ако бягате със скорост, равна точно на $\dfrac{v}{1+\pi}$, ще достигнете оградата едновременно с кучето. Затова, за да напуснете парка безпроблемно, ще ви е необходимо да бягате с малко по-голяма скорост.

И така, отговорът на въпроса, който възникна при анализа на задачата е: търсената минимална скорост наистина е по-малка от v/π – тя е $\dfrac{v}{1+\pi}$.

Алтернативно решение. Сигурно познавате т.нар. парадокс на *буридановото магаре*[1]: магаре, намиращо се точно в средата между две абсолютно еднакви купи сено, умира от глад, защото не може да реши към коя купа да посегне...

Като се опираме на твърдението в условието на задачата, че кучето "*във всеки момент се стреми да скъси разстоянието до вас*", можем да твърдим, че бихте могли да напуснете парка безопасно без въобще да бягате. За целта е достатъчно спокойно да се насочите от центъра **точно** към точката от оградата, диаметрално противоположна на кучето. В този случай, следвайки стриктно своята тактика, то трябва да остане на мястото си, защото няма аргумент, който да му подскаже накъде да бяга – наляво или надясно.

В приведеното по-горе решение ние негласно допуснахме, че кучето **спонтанно** ще наруши съдържащата се в задачата симетрия. (На фигурата тази симетрия вече е нарушена – художникът е нарисувал кучето обърнато наляво, така че има привилегирована посока. Едно наистина зло куче обаче няма да застане така – то ще гледа към центъра на кръга, където е евентуалната му жертва.) Ето как в този

[1] Както се твърди, Жан Буридан няма отношение към тази формулировка на парадокса, който всъщност дължим на Аристотел (Аристотел обаче говори не за магаре, а за куче).

елементарен случай се натъкваме на нещо – спонтанното нарушаване на симетрия, което играе все по-важна роля във физиката, като се започне от теорията на фундаменталните частици и се стигне до разсъжденията за ранните етапи в развитието на Вселената.