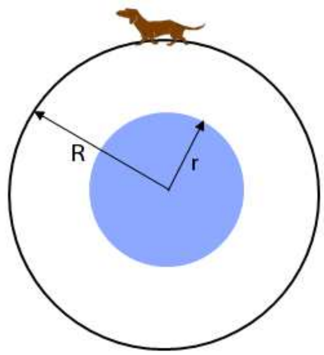
Класика 2 – куче–пазач

Втора задача, която подобно на задачата на Тулчински[1] може да се причисли към “класическия жанр” поради факта, че и в нея най-съществен е елементът **досещане**, е следната:

Намирате се в центъра на кръгъл парк, който искате да напуснете. Паркът обаче се охранява от зло куче. Добрата новина е, че кучето е привързано за оградата така, че може да обикаля по нея, стремейки се да скъси разстоянието от него до вас. Лошата новина обаче е, че то бяга четири пъти по-бързо отколкото можете да бягате вие. Ще успеете ли да напуснете парка при тези условия?



Фиг. 1.

Анализ. Първата мисъл, която идва на човек, е до побегне по диаметъра в противоположна на кучето посока. Да проверим дали при данните в условието това е печеливша тактика.

Да означим с R радиуса на кръга, а с v – скоростта, с която можете да бягате. За достигане до оградата ви е необходимо време $\frac{R}{v}$. В същото време, за да достигне същата точка от оградата, към която сте се насочили вие, кучето трябва да измине полуокръжност, т.е. път πR . Тъй като неговата скорост е $4v$, за изминаване на този път му е необходимо време $\frac{\pi R}{4v}$. Тъй като $\frac{\pi}{4} < 1$, кучето ще пристигне преди вас в точката, към която сте се насочили и следователно това не е начинът, по който можете да напуснете парка.

Озарението. Това е моментът, в който е необходимо да се измисли някаква нестандартна тактика, някаква хитрина. Тя трябва да позволи да се отдалечите от кучето и същевременно – да се доближите до оградата. Това може да стане като използвате факта, че кучето винаги се стреми да намали разстоянието до вас. Затова, ако се отместите от центъра на разстояние r в посока към кучето, то ще остане неподвижно. Ако след това започнете да бягате по окръжността с радиус r, то ще започне да бяга в същата посока, но по оградата. Вашата ъглова скорост при това е $\frac{v}{r}$, а на кучето – $\frac{4v}{R}$. Ясно е, че ако r е достатъчно малко, вашата ъглова скорост ще бъде по-голяма от тази на кучето. В този случай радиусът, който ви свързва с центъра на кръга, ще описва все по-голям ъгъл от ъгъла, описван от радиуса, който свързва кучето с центъра. По този начин с течение на времето ще настъпи момент, в който вие ще изпреварите кучето с половин оборот, т.е. ще се окажете с него върху един диаметър,

[1] Виж материала, озаглавен “Класика 1 – вариации върху “тема” на Тулчински”

но от двете страни на центъра на кръга. А това е точно желаната ситуация: вие сте по-далече от кучето и по-близо до оградата, отколкото в условието на задачата.

Решение. Оттук нататък решението включва стандартни разсъждения. Разстоянието от вас до оградата е $R - r$ и намалява с увеличаване на r. Нека намерим онзи радиус r, при който вашата ъглова скорост и ъгловата скорост на кучето са равни. За него е изпълнено равенството:

$$\frac{v}{r} = \frac{4v}{R}, \qquad \text{т.е.} \qquad r = \frac{R}{4}.$$

Ако бягате по окръжност с този радиус, вие и кучето ще се намирате върху права, която минава през центъра на кръга (при условие, че и в началния момент е било така). Ако обаче бягате по окръжност с малко по-малък радиус, вие ще започнете да изпреварвате кучето и постепенно ще достигнете положение, при което сте го изпреварили с половин оборот. Колкото по-малък е радиусът на вашата “писта”, толкова по-бързо ще достигнете това положение, но пък и толкова по-голямо разстояние ($R - r$) ще ви отделя от заветната ограда.

Нека видим дали в граничния случай, т.е. при $r = \frac{R}{4}$, ще успеете да се доберете до оградата преди кучето. За изминаване на разстояние $R - r = R - \frac{R}{4} = \frac{3}{4}R$ на вас ви е необходимо време $\frac{\frac{3}{4}R}{v} = \frac{3R}{4v}$. И в този случай обаче кучето трябва да направи половин обиколка, т.е. неговото време за достигане до точката, към която бягате и вие, и сега е $\frac{\pi R}{4v}$. И тъй като $\frac{3R}{4v} < \frac{\pi R}{4v}$, очевидно проблемът ви е решен – вие ще достигнете оградата преди кучето.

Това бе граничният случай $r = \frac{R}{4}$. При него обаче ъгловите скорости са равни – не можете да изпреварите кучето. Но ако малко намалите r, разликата между π и 3 гарантира наличие на решение.