Класика 1: вариации върху "тема" от Тулчински

Неведнъж и на страниците на сп. Физика, и в други случаи[1] сме напомняли нещо известно: решаването на физични задачи не бива да се свежда до подбиране, комбиниране и преобразуване на формули, заместване на числени стойности и пресмятания за получаване на отговор. За по-дълбоко вникване в същността на физичните закономерности и за развиването на логическото мислене не по-малко значение има анализът на условието и на решението, както и обсъждането на варианти на началната ситуация. И сме подкрепяли това твърдение с примери.

Тук привеждаме още един пример, който може да се използва в обучението по физика в 8. клас, където по новата учебна програма тази година се изучават прости механизми. Примерът е от известната и, за съжаление, вече трудна за намиране книга на Тулчински[2]. В нея фигурира следната качествена задача:

"Възрастен човек и дете трябва да преминат една рекичка: единият на левия бряг, а другият на десния бряг. Има по една дъска на всеки бряг, но дъските са малко по-къси от разстоянието между бреговете. По какъв начин всеки от двамата може да премине от единия до другия бряг?"

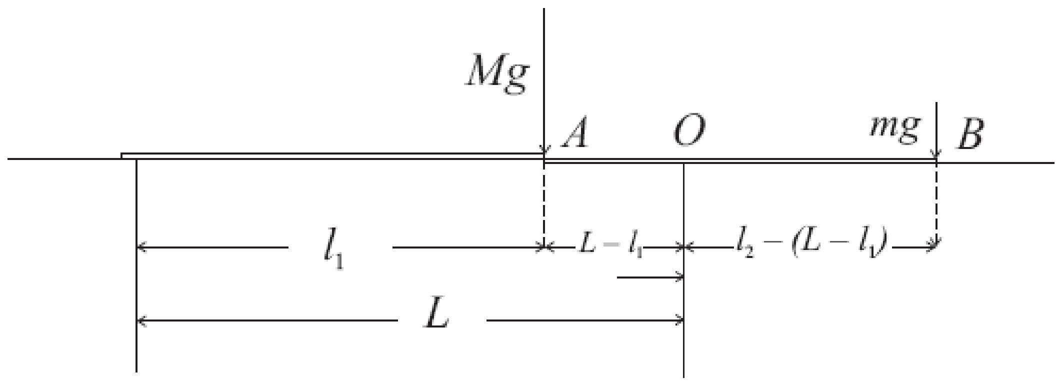
Решението е единствено и се вижда от дадената в книгата фиг. 1: детето поставя своята дъска така, че единият й край да е издаден над водата толкова, колкото е недостигащата дължина на дъската на възрастния, за да достигне десния бряг, и стъпва върху другия край. Възрастният поставя своята дъска между левия бряг и дъската на детето и преминава по образувания "мост". След това той застава върху дъската на мястото на детето, а то преминава на левия бряг.

фиг. 1.

Като физика задачата не е сложна – единственото, необходимо за решаването й, е условието за равновесие на лостове. Това, с което тя може да завладее вниманието, да възбуди въображението на ученика, е елементът на досещане. Има доста подобни физични задачи, за чието решение най-съществен е този елемент и те представляват своеобразна "класика в жанра". Задачата на Тулчински несъмнено принадлежи към тях. Тя обаче има още едно качество, което увеличава методическата й стойност: тя предоставя възможност за преход от едно чисто качествено равнище към количествени разглеждания, които позволяват да се отговори на въпроса кога, при какви условия задачата има решение.

След като човек се досетил, че трябва да се използват лостове, решението на задачата не е трудно: дъската на детето служи като лост с опорна точка върху десния бряг (т. O на фиг. 2), върху рамената на който в т. A и в т. B са приложени теглата съответно на възрастния човек и на детето.

[1] Вж. напр. **Попов Хр.** 53 + 15 решени физични задачи, С., Просвета, 2000.
[2] **Тулчински М. Е.** Сборник от качествени задачи по физика, С.,"Народна просвета", 1969.



Фиг. 2.

Какви въпроси може да се обсъждат на **качественото** равнище на задачата?

Първо: може да се обсъди защо "операцията" не може да се проведе в обратен ред: най-напред да премине детето, а после – възрастният човек. Тъй като отговорът не е труден, направо преминаваме към по-сложни въпроси, за решаването на които ще въведем някои означения: нека

– L е широчината на рекичката;
– l_1 – дължината на дъската, с която разполага възрастният;
– l_2 – дължината на дъската, с която разполага детето;
– M и m са масите съответно на възрастния и на детето (очевидно $M > m$).

Второ: В условието се казва, че дъските са "малко по-къси от разстоянието между бреговете" (т.е. $l_1 < L$ и $l_2 < L$). Колко може да бъде това "малко"? От геометрични съображения например е ясно, че сумата от дължините на двете дъски трябва да удовлетворява неравенството:

(1) $$l_1 + l_2 > L \; .$$

Ако (1) не е изпълнено, никаква комбинация от дъските не осигурява размяна на местата на възрастния и детето, т.е. (1) е необходимо условие за съществуване на решение на задачата.

Ако в разсъжденията включим и физични съображения, оценката (1) може да се подобри значително. Наистина, решението почива върху условието за равновесие на лостове. Върху дясното рамо на лоста действа теглото mg на детето. Когато възрастният тръгне надясно, натоварването на лявото рамо постепенно расте и достига максимална стойност Mg, когато той стъпи в точката, в която двете дъски се застъпват. Тъй като по-предположение $M > m$, лостът ще бъде в равновесие, ако дясното рамо е по-дълго от лявото. Това означава, че издадената над водата част от дъската на детето е по-къса от $l_2/2$ и тогава същите геометрични съображения, които доведоха до неравенство (1), сега водят до по-силното неравенство:

(2) $$l_1 + l_2/2 > L.$$

(По-силно в смисъл, че ако е изпълнено (2), то непременно ще е изпълнено и (1).)

Трето: Има ли задачата решение, ако дъската на възрастния човек не достига до средата на рекичката, т.е. ако $l_1 < L/2$? Тъй като по условие $l_2 < L$, отговорът на този въпрос е отрицателен. Наистина, за да сработи конструкцията с лоста, в този случай е необходимо лявото рамо да бъде по-дълго от $L/2$, а тъй като дясното е по-дълго от лявото, то цялата дължина на дъската на детето се оказва по-голяма от L, което противоречи на условието. (Ако тази дъска е по-дълга от L, не са необходими никакви лостове – самата тя може да се използва като мост.)

Вероятно на това качествено равнище могат да се обсъждат и други въпроси. Нека обаче сега от качествена, превърнем задачата в **количествена** и поставим въпроса при каква минимална маса на детето задачата има решение, ако смятаме дължините на дъските и масата на възрастния човек за зададени, т.е. – фиксирани.

Преди всичко от условието за равновесие на лост е ясно, че масата на детето ще бъде минимална, ако осигурим максимална дължина на рамото *OB*, т.е. ако над водата се издава колкото може по-къса част от дъската на детето. А това означава, че възрастният трябва да използва цялата дължина на своята дъска – така, както е показано на фиг. 2. При това положение условието за равновесие на лоста се изразява с равенството:

(3) $$Mg(L-l_1)=mg[l_2-(L-l_1)].$$

Оттук за търсената минимална маса на детето получаваме:

(4) $$m=\frac{L-l_1}{l_1+l_2-L}M\ .$$

За да е изпълнено неравенството $m < M$ е необходимо коефициентът пред M в дясната страна на (4) да бъде по-малък от 1 – условие, което води до неравенство (2), до което достигнахме при качествения анализ на задачата. Същото неравенство, записано във вида $l_1 > L - l_2/2$, показва, че при зададено l_2 задачата има решение, ако l_1 не е по-малко от $L - l_2/2$.

С помощта на (3) може да се търсят отговорите и на други въпроси: например при зададени маси M и m и на дължината на една от двете дъски, каква трябва да е дължината на другата дъска, за да има задачата решение? Т. напр. от (3) за дължината на първата дъска намираме:

(5) $$l_1=L-\frac{m}{M+m}l_2\,.$$

Оттук се вижда нещо, което трябва да е интуитивно ясно: колкото по-малка е масата на детето, толкова по-дълга трябва да е дъската на възрастния човек (в граничния случай при $m = 0$ тя става $l_1 = L$, т.е. няма нужда от никакви лостове.) В другия граничен случай, когато масата на детето е равна на масата на възрастния ($m = M$), от (5) получаваме $l_1 = L - l_2/2$, а лостът става равнораменен.

Обратно, ако смятаме зададена дължината на дъската на възрастния, от (3) за дъската на детето намираме:

(6) $$l_2=\frac{M+m}{m}(L-l_1).$$

Ако заместим този израз за l_2 в неравенството $l_2 \le L$ и преобразуваме полученото неравенство, получаваме, че задачата има решение, само ако l_1 не е по-малко от $\frac{M}{M+m}L$, т.е. трябва да е изпълнено неравенството:

(7) $$l_1\ge\frac{M}{M+m}L\,.$$

Оттук отново следва, че при $m = 0$ имаме $l_1 = L$, а при $m = M$, съответно $l_1 \ge L/2$, което, комбинирано с (6), дава $l_2 \le L/2$.

Тези резултати стават по-прозрачни, ако намалим броя на параметрите, като например, приемем, че двете дъски са с равни дължини, т.е. при:

(8) $$l_1=l_2=l\,.$$

В този случай за минималната маса на детето, при която задачата има решение, от (4) получаваме:

(9) $$m=\frac{L-l}{2l-L}M\ .$$

От условието стойността на коефициента пред M в дясната страна да бъде между 0 и 1 получаваме, че дължината на дъските трябва да надминава $\frac{2}{3}L$, което осигурява изпълнение на неравенство (2).

При същото опростяващо допускане от (5) или (6), при зададени маси за дължината на дъските намираме:

(10) $$l = \frac{M+m}{M+2m}L\,.$$

Лесно се проверява, че в този случай условието $M > m$ гарантира изпълнението на неравенство (2).

Това са само някои от възможните "вариации" върху темата, зададена от Тулчински. Усложнения може да се търсят и в посока на увеличаване броя на параметрите, като например се разглеждат и случаи, в които не се използва цялата дължина на дъската, която е на левия бряг и др. Въпросът е дали си струва – все пак физиката (т.е. – условието за равновесие на лост) е твърде проста и всяко друго усложняване ще води до упражнения по математика, а не по физика.

За да не изглеждат тези разглеждания твърде абстрактни, е възможно в количествения вариант на задачата да се зададат конкретни стойности на параметрите, т.е. да се пита съществува ли решение при определени стойности на L, l_1, l_2, M и m, или при каква максимална маса на възрастния човек задачата има решение при известни стойности на останалите параметри и т.н.

По подобен начин е възможно и много други качествени задачи да се превръщат в количествени и да се изследва как промяната на някои от параметрите влияе върху крайния резултат, като често по този начин може косвено да се проверява и верността на решението.