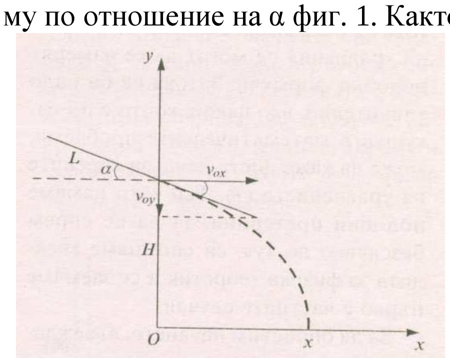
Почти като в един стар анекдот...

Според въпросния анекдот, един физик-теоретик трябвало да установи как стабилността на една маса зависи от броя n на краката ѝ. Той бързо решил проблема за маса с един крак и за маса с безброй много крака, след което цял живот се занимавал със случая на крайно $n \neq 1$. По-долу представяме аналогичен случай.

Животът около нас предоставя множество ситуации, удобни за съставяне на интересни физични задачи. Много подобни задачи срещаме в сборниците и чрез решаването им успешно се постигат разнообразни цели на обучението по физика. Има обаче и такива, които въпреки привидната си простота, не фигурират в нито един сборник. Една ситуация от този вид е следната: мокър сняг се хлъзга от покрива на къща и пада на земята. Задавали ли сте си въпроса при какъв наклон на покрива снегът ще падне най-далеч от основите на къщата? Ситуацията лесно може да се опрости и формализира до следната задача.

Задача. Тяло се хлъзга без триене и без начална скорост по наклонена плоскост с дължина L която сключва ъгъл α с хоризонта. Долният край на плоскостта е на височина H над земята. При какъв ъгъл α далечината на полета на тялото в хоризонтална посока ще бъде максимална?

Анализ. На пръв поглед задачата е достатъчно проста – ясно е кои закони трябва да се използват, а и видът им не е сложен. Трябва да се намери търсеното разстояние x и да се търси максимумът му по отношение на α фиг. 1. Както ще се убедим, намиране-



Фиг. 1.

на такъв израз е наистина елементарно, за разлика от втората част на решението – намирането на максимума.

Нека първо анализираме качествено задачата, за да се убедим, че наистина трябва да очакваме наличие на максимум. Наистина, при $\alpha \to 90^o$ (много стръмен покрив) тялото ще започне падането си във въздуха (след отделяне от наклонената равнина) с максимална скорост, но очевидно ще падне при самата основа на постройката (т.е. $x \to 0$). Същото е положението и при $\alpha \to 0^o$ (почти хоризонтален покрив) – в този случай началната скорост след отделяне от покрива клони към нула, поради което отново $x \to 0$.

От тези разсъждения следва, че има някаква (поне една) стойност на наклона α, при която далечината на полета е максимална. Това заключение по-нататък играе важна роля, защото гарантира, че уравнението, което ще получим за ъгъла α, има поне едно решение в интервала 0^o–90^o.

Какво може да покаже един предварителен анализ на размерностите? В условието на задачата фигурират три параметъра: дължината на покрива L, височината на къщата H и ъгълът на наклона α. Разбира се, неявно участва и четвърти – земното ускорение g, чиято размерност е $[g] = [L][T]^{-2}$. Доколкото търсената стойност α_0 на разклона е **безразмерна** величина, анализът на размерностите показва, че α_0 би могло да зависи само от безразмерното отношение $\xi = L/H$. Наистина, тъй като времето фигурира само в размерността на земното ускорение, никаква комбинация от параметрите, в която фигурира g, не може да бъде безразмерна. Следователно отговорът не може да зависи от g. (От същите съображения следва, че при произволен наклон далечината на полета също няма да зависи от земното ускорение, което в известен смисъл е неочаквано заключение.)

Израз за разстоянието x, на което ще падне тялото, намираме с помощта на фиг. 1. Ако отчитаме потенциалната енергия на тялото от долния край на наклонената плоскост, в началото на движението стойността ѝ е $mgL\sin\alpha$, където m е масата на тялото. Законът за запазване на енергията гарантира, че толкова е и кинетичната енергия на тялото, когато се откъсва от покрива, т.е.:

$$mgL\sin\alpha = \frac{mv_0^2}{2},$$

където v_0 е началната скорост, с която започва движението във въздуха. Оттук за нея получаваме:

(1) $$v_0 = \sqrt{2gL\sin\alpha}.$$

За да запишем закона за движението на тялото след отделяне от наклонената равнина,са необходими изрази за хоризонталната и вертикалната съставящи на началната скорост. От (1) за тях получаваме:

(2) $$v_{0x} = \cos\alpha\sqrt{2gL\sin\alpha}$$

(3) $$v_{0y} = -\sin\alpha\sqrt{2gL\sin\alpha}.$$

Ако приемем $t = 0$ в началото на движението във въздуха, за закона за движение на тялото получаваме:

(4) $$x = v_{0x}t = t\cos\alpha\sqrt{2gL\sin\alpha}$$

(5) $$y = H + tv_{0y} - \frac{1}{2}gt^2 = H - t\sin\alpha\sqrt{2gL\sin\alpha} - \frac{1}{2}gt^2.$$

От (5) при $y = 0$ намираме момента t', в който тялото пада на земята. Като заместим получения израз за t' в (4), за далечината на полета намираме:

(6) $$x = 2L\cos\alpha\left(\sqrt{\sin^4\alpha + \xi\sin\alpha} - \sin^2\alpha\right),$$

където сме използвали въведения по-горе безразмерен параметър $\xi = L/H$. (От (6) се вижда, че анализът на размерностите не подвежда – x наистина не зависи от земното ускорение!)

Трудностите започват, когато започнем да търсим екстремумите на x по отношение на α: след като приравним на нула производната на (6) по α и изразим всички събираеми чрез $\sin\alpha$, получаваме алгебрично уравнение от твърде висока степен:

(7) $$12\sin^5\alpha + 9\xi\sin^4\alpha - 8\sin^3\alpha - 6\xi\sin^2\alpha + \xi = 0.$$

В такъв случай обикновено казваме, че "задачата няма решение".

Всъщност, ние знаем, че решение съществува, но с тези думи подсказваме, че помним теоремата от висшата алгебра, според която няма обща формула за корените на алгебрично уравнение със степен, по-висока от четвърта. Разбира се, това не означава, че за някои конкретни уравнения не могат да се намерят подобни формули. Затова не би било удивително, ако някой по-изкушен в математиката, може да каже доста неща за корените на уравнението (7). Нямайки подобни претенции, за да продължим все пак, си спомняме анекдота за физика-теоретик и се заемаме първо с частните случаи.

За да опростим писането, въвеждаме следната спомагателна променлива:

(8) $$z = \sin\alpha, \quad 0 < z < 1$$

и с нейна помощ записваме (7) във вида:

(9) $$4z^3\left(3z^2-2\right)+\xi\left(3z^2-1\right)^2=0\,.$$

Първи частен случай: ξ = *H/L* >> 1. Това е случаят на висока къща с къс покрив (или, по-реалистично, когато снегът тръгва не от горния ръб на покрива, а от точка, по-близка до долния му ръб). Тъй като стойностите на първото събираемо в (9) са ограничени (то не зависи от ξ), можем да го пренебрегнем и уравнението ще бъде удовлетворено при:

(10) $$z'=\frac{1}{\sqrt{3}}=0{,}5773\,.$$

Следователно максимална далечина на полета в този случай се получава при наклон на покрива:

$$\alpha'=\arcsin 0{,}5773\approx 35^\circ\,.$$

Този резултат бихме могли да получим и много по-бързо, ако първо се бяхме замислили върху физическата ситуация: при късо засилване от покрива (L << H) вертикалната съставяща на придобитата скорост е малка и практически не влияе върху времето на падането – в този случай то се определя само от H. При това положение далечината на полета ще бъде максимална, когато е максимална хоризонталната съставяща на скоростта (2). А намирането на максимума на v_{0x} е много по-лесно и води отново до формула (10).

Като имаме предвид получената стойност за α’, от (6) за максималната далечина на полета в този случай получаваме:

(11) $$x'\approx 1{,}24\sqrt{LH}\,.$$

Ако положим $z=\frac{1}{\sqrt{3}}+\varepsilon$ и се върнем към уравнението (9), лесно може да получим и първата поправка на z’ и т.н.

Втори частен случай: ξ = *H/L* << 1. В този случай височината на къщата е много по-малка от дължината на покрива. Тъй като в (9) множителят зад ξ е ограничен, при пренебрежимо малко ξ решението на уравнението е:

(12) $$z''=\sqrt{\frac{2}{3}}=0{,}8165\,.$$

Следователно максимална далечина на полета в този случай се получава при наклон на покрива

$$\alpha''=\arcsin 0{,}8165\approx 55^\circ\,.$$

Ако в (6) отчетем, че ξ = H/L << 1 и запазим само линейните по отношение на ξ членове, за максималната далечина на полета в този случай получаваме:

(13) $$x'' = H\mathrm{cotg}\alpha.$$

Този резултат също е разбираем от физична гледна точка: при малка височина времето за падане е твърде кратко и тялото лети почти по права линия. (Интересно е дали и резултатът (12) може да се получи чрез подобни прости разсъждения.)

Ако в (13) заместим получената стойност за α”, намираме:

(14) $$x''=\frac{H}{\sqrt{2}}=0{,}7071H\,.$$

В рамките на това приближение далечината на полета не зависи от дължината на покрива. Отново чрез полагане $z=\sqrt{\frac{2}{3}}+\varepsilon$ можем да търсим следващо приближение към интересуващия ни корен на (9) и т.н.

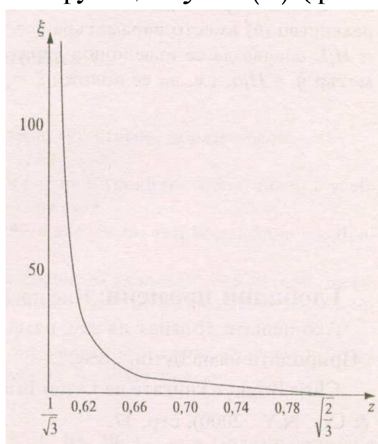
Дотук свършихме това, което теоретикът направил, като решил задачата за стабилността на маса с един крак и с безкрайно много крака. Сега вече трябва да отчетем, че освен безкрайно високи и безкрайно ниски къщи, има и нормални къщи, за които ξ не е нито безкрайност, нито нула.

Общ случай на крайна стойност на ξ. В този случай не можем да предложим аналитичен израз за α като функция от ξ, но ще се възползваме от наличието на други начини (освен аналитичния) за задаване на функционални зависимости – например графично. За целта е необходимо да използваме подходяща компютърна програма, с която да получим графиката на функцията $\alpha = f(\xi)$, зададена неявно с уравнението (9).

Използването на програма за решаване на уравнения от пета степен обаче не е задължително. Достатъчно е равенство (9) да се реши спрямо параметъра ξ:

(15) $$\xi = \frac{4z^3\left(2-3z^2\right)}{\left(1-3z^2\right)^2}$$

и след това, като се дават на z стойности в интересуващия ни интервал от $\sqrt{\frac{1}{3}}$ до $\sqrt{\frac{2}{3}}$, се построи графика на обратната функция $\xi = F(\alpha)$ (фиг. 2).



Фиг. 2.

Графиката може да се използва по следния начин. При зададени конкретни стойности на L и H пресмятаме стойността на ξ и от графиката намираме какво z = sinα съответства на това ξ, а след това чрез него по формула (6) пресмятаме и максималната далечина на полета.

Тази задача, но в по-реалистичния й вариант, при който се отчита и влиянието на триенето при хлъзгане, е разгледана от W. H. Van den Berg и A. R. Burbank в статията им “Хлъзгане от покрив: как точката на приземяване зависи от наклона?” (*The Physics Teacher*, 2002, **40**, 2). Тъй като теоретичното разглеждане в този случай е още по-сложно, авторите й представят резултатите, получени при практическото й решаване като лабораторно упражнение.

Тема за размисъл. Разгледаният проблем е реалистичен само на пръв поглед. Ако човек строи къща и търси при какъв наклон на покрива снегът ще пада максимално далеч от основите, задачата е малко по-различна. Причината се крие във факта, че на практика е фиксирана не дължината L на покрива, а широчината на фасадата на къщата. Това означава, че вместо L като фиксирана трябва да се разглежда величината $a = L\cos\alpha$. При това положение в равенство (6) трябва да се въведе нов параметър $\eta = H/a$. Това променя съществено пресмятанията – предлагаме на читателя да разгледа този случай, като използва начините, приложени по-горе.

Още по-реалистично разглеждане може да се постигне, като се отчете, че на практика къщите имат стряха. Това вкарва в задачата още един параметър – дължината на стряхата, т.е. разстоянието между долния ръб на покрива и стената. Ако проблемът с отвеждането на падащия сняг колкото може по-далеч от основите е наистина съществен, тогава вместо чрез промяна на ъгъла на наклона, решението му може да се търси чрез вариране на дължината на стряхата. (Решението, при което стряхата стига до земята очевидно не задоволява от практическа гледна точка – вероятно ще трябва да се търси оптимум, като се отчетат и някои други критерии.)