Как да изпратим в Космоса футболна топка без ракета

Задачата. Ако 40-тонна цистерна лети по магистрала със скорост 32 m/s (≈ 115 km/h), кинетичната й енергия би била достатъчна, за да се придаде на футболна топка с маса 0,4 kg първа космическа скорост. Възможно ли е чрез удар на цистерната в топката последната да получи скорост 8 km/s? Всички удари смятаме челни, абсолютно еластични.

Качествен анализ. Отговорът на така формулираната задача е очевиден: чрез еднократен удар топката би придобила скорост едва около 230 km/h. Наистина, спрямо отправна система, в която цистерната е в покой, топката налита към нея със скорост 115 km/h, удря се и отскача (поради разликата в масите) като от стена със същата по големина, но в обратна посока скорост. И тъй като самата отправна система се движи в тази посока със скорост 115 km/h, спрямо Земята скоростта на топката би била 115 + 115 = 230 km/h.

В различни сборници и публикации (вж.напр. [1], [2]) се показва обаче, че ако между цистерната и топката се постави неподвижно тяло с подходяща маса, т.е. ако ударът е не директен, а чрез посредник (и фактически има два удара), топката може да придобие скорост, по-голяма отколкото при директен удар. Този факт подсказва, че ако използваме повече посредници, скоростта на топката може да се увеличава още и в края на краищата може би ще успеем “да я изстреляме в Космоса”. Разбира се, това увеличение не може да продължава “до безкрайност” – то е ограничено от закона за запазване на енергията. Ако означим с m_0 и v_0 масата и скоростта на цистерната, а с m_n и v_n съответните величини за топката, максималната скорост, която би могла да достигне топката чрез многократни удари, се определя от равенството:

$$\frac{1}{2}m_0v_0^2 = \frac{1}{2}m_nv_n^2 \text{, т.е.}$$

$$v_n = \frac{v_0}{\sqrt{\xi}}, \tag{1}$$

където с $\xi = \frac{m_n}{m_0}$ е означено отношението между масата на топката и масата на цистерната.

От физични съображения е ясно как почти цялата енергия на цистерната може да се прехвърли към топката. Известно е, че чрез челен еластичен удар на тяло с определена маса в неподвижно тяло със същата маса цялата енергия на първото тяло це предава на второто. Ако масата на неподвижното тяло е малко по-малка, то ще получи не цялата, но почни цялата енергия на налитащото тяло. Затова, когато искаме голямата част от кинетичната енергия на едно тяло да бъде предадена на неподвижно тяло с по-малка маса, между тях трябва да разположим достатъчен брой тела, чиито маси намаляват по подходящ начин. Колко обаче трябва да бъдат тези тела и какви – техните маси, може да покаже само едно количествено разглеждане, като на последния му етап, при числените пресмятания, използването на подходящ софтуер ще бъде ако не неизбежно, то поне – най-ефективно.

Директен удар. Нека цистерната удари директно топката. Записваме с вече въведените означения закона за запазване на импулса:

$$m_0v_0 = m_0v' + m_nv_n,$$

изразяваме от него скоростта *v’* на цистерната след удара и я заместваме в закона за запазване на енергията:

$$\frac{1}{2}m_0v_0^2=\frac{1}{2}m_0v'^2+\frac{1}{2}m_nv_n^2 .$$

След заместването решаваме полученото уравнение спрямо скоростта v_n на топката и получаваме:

(2) $$v_n=\frac{2v_0}{1+\dfrac{m_n}{m_0}}=\frac{2v_0}{1+\xi} .$$

Удар с един посредник. Нека между цистерната и топката се намира посредник – неподвижно тяло с маса m_1, което поема удара от цистерната, след което удря топката. В съответствие с формула (2) преди да удари топката, скоростта на посредника е:

(3) $$v_1=\frac{2v_0}{1+\dfrac{m_1}{m_0}} .$$

След това той удря топката и, отново по същата формула, й предава скорост:

(4) $$v_2=\frac{2v_1}{1+\dfrac{m_2}{m_1}}=\frac{2}{1+\dfrac{m_2}{m_1}}\frac{2v_0}{1+\dfrac{m_1}{m_0}}=\frac{4v_0}{1+\xi+\dfrac{m_2}{m_1}+\dfrac{m_1}{m_0}} .$$

(В този случай масата и скоростта на топката означаваме съответно с m_2 и v_2.) Ако означим с x неизвестното отношение между m_1 и m_0, т.е. ако положим $x = m_1/ m_0$, изразът за скоростта v_2 приема вида:

$$v_2=\frac{4v_0}{1+\xi+x+\dfrac{\xi}{x}} .$$

Вижда се, че скоростта на топката е максимална, когато сумата $x + \xi/x$ е минимална. За да избегнем търсене на минимум чрез диференциране, последната можем да представим във вида:

$$x+\frac{\xi}{x}=\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{\xi}{x}}\right)^2+2\sqrt{\xi} .$$

Той има минимум, когато изразът в скобите е нула, т.е. при $x_0=\sqrt{\xi}=\sqrt{\dfrac{m_2}{m_0}}$. Оттук следва, че скоростта на топката е максимална, когато масата на посредника удовлетворява условието:

(5) $$m_1^2=m_0m_2 .$$

Като заместим $m_1=\sqrt{m_0m}$ в (4), за тази максимална скорост получаваме:

(6) $$v_{2\max}=\frac{4v_0}{\left(1+\sqrt{\xi}\right)^2} .$$

От (6) и (3) следва неравенството:

$$v_{2\max}-\frac{2v_0}{1+\xi}=\frac{4v_0}{\left(1+\sqrt{\xi}\right)^2}-\frac{2v_0}{1+\xi}=\frac{2v_0\left(1-\sqrt{\xi}\right)^2}{(1+\xi)\left(1+\sqrt{\xi}\right)^2}>0 ,$$

което показва, че наистина придобитата чрез посредник скорост е по-голяма от скоростта, придобита при директен удар.

Удар с (n – 1) *посредника.* Нека между цистерната и топката поставим (n – 1) неподвижни тела с маси m_i така, че след като цистерната удари тялото с маса m_1, то придобива скорост v_1, с която то удря тялото с маса m_2 и т.н. Според формула (5) ударът на i-тото тяло ще придаде максимална скорост на (i +1)-то, ако масите удовлетворяват равенството:

(7) $$m_i^2 = m_{i-1}m_{i+1}.$$

Като даваме на индекса i последователно стойности 1, 2, 3, ... n – 1, за неизвестните маси на посредниците получаваме следната система уравнения:

$$m_1^2 = m_0 m_2, \qquad m_2^2 = m_1 m_3, \ldots \qquad m_{n-1}^2 = m_{n-2}m_n.$$

Тя се решава чрез последователно изключване на неизвестните, т.е. от първото уравнение определяме m_1, заместваме получения израз във второто, от него определяме m_2 и т.н., докато накрая остане уравнение, от което определяме m_{n-1} чрез m_0 и m_n. След това, по обратния ред намираме останалите неизвестни маси. Така получаваме:

(8) $$m_1 = m_0^{\frac{n-1}{n}} m_n^{\frac{1}{n}}, \qquad m_2 = m_0^{\frac{n-2}{n}} m_n^{\frac{2}{n}}, \ldots \qquad m_i = m_0^{\frac{n-i}{n}} m_n^{\frac{i}{n}}, \ldots \qquad m_{n-1} = m_0^{\frac{1}{n}} m_n^{\frac{n-1}{n}}.$$

С помощта на формула (2) изразяваме скоростта на топката:

(9) $$v_n = \frac{2v_{n-1}}{1+\dfrac{m_n}{m_{n-1}}} = \frac{2}{1+\dfrac{m_n}{m_{n-1}}}\,\frac{2v_{n-2}}{1+\dfrac{m_{n-1}}{m_{n-2}}} = \ldots = \frac{2}{1+\dfrac{m_n}{m_{n-1}}}\,\frac{2v_{n-2}}{1+\dfrac{m_{n-1}}{m_{n-2}}}\cdots\frac{2v_0}{1+\dfrac{m_1}{m_0}}.$$

От (8) обаче следва, че:

$$\frac{m_i}{m_{i-1}} = \frac{m_0^{\frac{n-1}{n}} m_n^{\frac{i}{n}}}{m_0^{\frac{n-2}{n}} m_n^{\frac{i-1}{n}}} = \left(\frac{m_n}{m_0}\right)^{\frac{1}{n}} = \xi^{\frac{1}{n}},$$

т.е. знаменателите на всички дроби в (9) са еднакви. При това положение връзката между скоростта v_0 на цистерната и v_n на топката е:

(10) $$v_n = \frac{v_0}{\left(\dfrac{1+\xi^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n}.$$

(Формула (6) е очевиден частен случай на (10) при n = 2.)

С извода на формула (10) възможностите на елементарната математика се изчерпват.

Преди всичко да се убедим, че при $n \to \infty$ от (10) наистина следва (2)[1]. За целта предварително разглеждаме функцията $f(x)$, определена с равенството:

(11) $$\frac{f(x)}{x} + 1 = \frac{1+\xi^{\frac{1}{x}}}{2}, \qquad \text{т.е.}\quad f(x) = \frac{1}{2}x\left(\xi^{\frac{1}{n}} - 1\right).$$

Като имаме предвид, че:

$$\lim x\left(\xi^{\frac{1}{x}} - 1\right) = \ln x$$

получаваме, че:

(12) $$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{2}\ln\xi = \ln\sqrt{\xi}.$$

При това положение интересуващата ни граница на функцията:

[1] Ако задачата се разглежда с ученици, следващото разглеждане може да се пропусне.

(13) $$F(x)=\left(\frac{1+\xi^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^{x}=\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{x}$$

може да бъде намерена с помощта на формулата $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{x}=e^{a}$:

$$\lim_{x\to\infty}F(x)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}f(x)}=e^{\ln\sqrt{\xi}}=\sqrt{\xi}\ .$$

Следователно при $n\to\infty$ от (10) наистина следва (1), т.е. при достатъчно голям брой междинни тела с подходящо подбрани маси топката би могла да отнеме почти цялата енергия на цистерната и да отлети в Космоса.

Числени пресмятания. Остава с помощта на конкретните данни:

$m_0 = 40$ t $= 4.10^4$ kg, $m_0 = 0{,}4$ kg, $v_0 = 30$ m/s, $v_n = 8.10^3$ m/s

да пресметнем колко тела и с какви маси трябва да разположим между цистерната и топката, така че след последния удар топката да получи първа космическа скорост. В този конкретен случай:

$$\xi = 0{,}4/40\,000 = 10^{-5}.$$

Нека означим с

$$\eta=\frac{v_0}{v_n}=\frac{32}{8000}=0{,}004$$

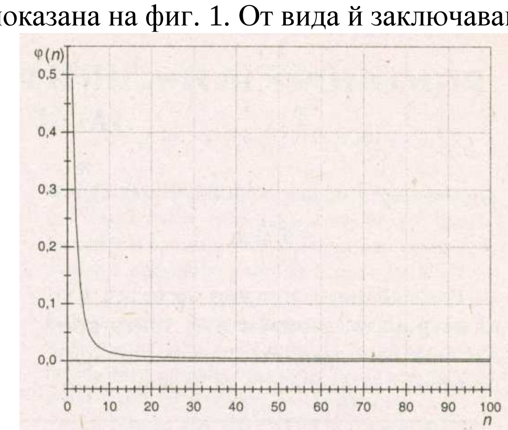
отношението между двете скорости. Тогава от (10) следва, че за да намерим броя на междинните тела трябва да решим спрямо n уравнението:

(14) $$\eta=\left(\frac{1+\xi^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^{n},\qquad \text{т.е.}\qquad 0{,}004=\left(\frac{1+0{,}00001^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^{n}.$$

Решението може да се търси с помощта на различен софтуер. Един от най-лесните начини е чрез възможностите за построяване на графики, които предлага програмата Origin 6.1. Чрез нея може да начертаем графиката на функцията:

(15) $$\varphi(n)=\left(0{,}5+0{,}5.0{,}0000^{\frac{1}{n}}\right)^{n}.$$

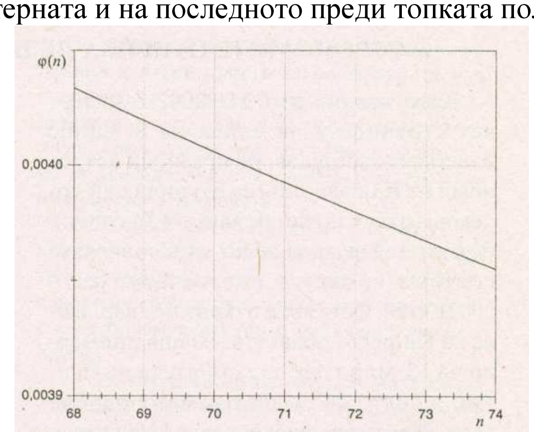
Тази графика е показана на фиг. 1. От вида й заключаваме, че търсената



Фиг. 1.

стойност 0,004 тази функция приема някъде за $n > 50$. Програмата дава възможност да изчертаем графиката за произволен интервал на промяна на аргумента. На фиг. 2 е показана част от графиката за $68 \le n \le 74$. От него се вижда, че $\varphi = 0{,}004$ при $n = 70{,}5$.

Тъй като по своя смисъл *n* е цяло число, виждаме, че решението на проблема е $n = 71$, т.е. между цистерната и топката трябва да разположим 70 тела, чиито маси се определят по формула (8). С помощта на подходящ калкулатор от нея за масите на първото тяло след цистерната и на последното преди топката получаваме:



Фиг. 2.

$$m_1 = (m_0)^{\frac{n-1}{n}}(m_n)^{\frac{1}{n}} = (40000)^{\frac{70}{71}}(0{,}4)^{\frac{1}{71}} \approx 34\,\mathrm{t}$$

$$m_{70} = (m_0)^{\frac{1}{n}}(m_n)^{\frac{n-1}{n}} = (40000)^{\frac{1}{71}}(0{,}4)^{\frac{70}{71}} \approx 470\,\mathrm{g}.$$

Разгледаният пример за сетен път илюстрира възможностите, които предоставя използването на различни компютърни програми за решаване на задачи, самото поставяне на които в “докомпютърната ера” бе безсмислено.

Литература

1. **Воробьов И. И.** и др. Задачи по физике, М., Наука, 1988.
2. **Fakhruddin H.** Maximizing Imparted Speed in Elastic Collisions, *TPT*, **41**, 2003, p. 338.
3. **Попов Хр.** Една задача – две решения, *Физика*, **2**, 2003, с. 23.
4. **Попов Хр.** Защо в сборниците няма такава задача? (Или как да решаваме “нерешими” задачи.), *Физика*, **3**, 2003, с. 62.