

### Със или без спирачки?

Определен интерес могат да представляват задачи, точното решение на които със средствата на училищната математика е недостъпно, но за които могат да се търсят различни приблизителни начини за решаване, като впоследствие приблизителните решения се сравнят с точното. Подобни задачи дават възможност да се сравняват резултатите от различните приближения, да се разсъждава върху обосновката и целесъобразността както на самите приближения, така и на други подобни въпроси, които доближават формално абстрактните задачи до практически важните. По-долу привеждаме пример за една подобна задача.

Известно е, че съпротивлението, което действа по време на движение върху един автомобил, може да се представи като сума от две сили. Едната е резултат от триенето между движещите се една спрямо друга части на двигателя и ходовата част и от деформацията на гумите при контакта с пътната настилка. Тази сила не зависи или слабо зависи от скоростта на движение. Втората сила е съпротивлението на въздуха и силно зависи от скоростта  $v$  на движение на колата. С добро приближение може да се смята, че големината ѝ е право пропорционална на квадрата от скоростта. Като се изключи диапазонът на малките скорости, общото съпротивление при движението се определя от втората сила – от съпротивлението на въздуха. Тези съображения следва да се отчитат при решаване на следната задача.

**Задача.** Автомобил се движи по прав хоризонтален участък от магистрала със скорост  $v_1 = 120$  km/h. В един момент шофьорът изключва от скорост, оставя колата да се движи “по инерция” и засича, че за време  $t_0 = 5$  s скоростта намалява до  $v_2 = 105$  km/h. Малко по-нататък, продължавайки движението по инерция, в момент, когато скоростта на движението му е  $v' = 70$  km/h, на разстояние  $s_0 = 200$  m пред колата шофьорът вижда пост на КАТ, покрай който скоростта е ограничена до  $v'' = 60$  km/h. Достатъчно ли е колата да продължи да се движи изключена от скорост, или трябва да се задействат и спирачките, за да се спази ограничението пред поста на КАТ? Приемете, че съпротивлението е пропорционално на квадрата на скоростта.

**Анализ.** Трудността при решаване на тази задача произтича от факта, че съпротивлението на въздуха не е постоянно, тъй като зависи от скоростта на движение. Ще разгледаме два различни начина за приблизително решаване на задачата.

В условието на задачата става дума за едно и също движение по инерция, но в два различни интервала време. Очевидно данните за движението през първия интервал (5 сек.) трябва да се използват за определяне на коефициента  $k$  във формулата  $F = kv^2$  за силата на съпротивление, след намирането на който вече може да се пресмята дали 200 метра са достатъчни за намаляване на скоростта от 70 km/h до 60 km/h.

#### Решение

*Първи начин.* Най-напред ще оценим средното ускорение  $a_{\text{ср.}}$  на колата по време на забавяне на движението през първите 5 секунди. Според определението за средно ускорение (всъщност – закъснение), големината му е:

$$(1) \quad a_{\text{ср.}} = \frac{v_1 - v_2}{t_0} .$$

Тъй като интервалът  $v_1 - v_2 = 15$  km/h е относително малък спрямо крайната скорост (под 15 %), ще смятаме ускорението по време на забавянето постоянно и равно на  $a_{\text{ср.}}$ . Тогава с помощта на втория принцип на динамиката можем да намерим израз за големината на средната сила на съпротивление, действаща на автомобила през 5-те секунди на забавяне:

$$(2) \quad F = m \frac{v_1 - v_2}{t_0} ,$$

където с  $m$  е означена масата на автомобила.

Съгласно с предположението, че съпротивлението е правопрпорционално на квадрата от скоростта, големината на средната сила на съпротивление в интервала от скорости  $(v_1, v_2)$  може да се представи като:

$$(3) \quad F = k \left[ \frac{(v_1 + v_2)}{2} \right]^2,$$

като сме използвали средно аритметичната стойност на скоростта. Чрез приравняване на десните страни на (2) и (3) за коефициента  $k$ , от който зависи съпротивлението, получаваме израза:

$$(4) \quad k = \frac{4m(v_1 - v_2)}{t_0(v_1 + v_2)^2}.$$

По подобен начин средната сила на съпротивление, която действа върху автомобила преди достигане на поста на КАТ, ще има големина:

$$(5) \quad F_{\text{сп.}} = k \left( \frac{v' + v''}{2} \right)^2.$$

Тя придава на колата ускорение (закъснение) с големина:

$$(6) \quad a' = \frac{F_{\text{сп.}}}{m}.$$

От закона за скоростта при равнозакъснително движение:

$$(7) \quad v'' = v' - a't'$$

определяме времето  $t'$ , необходимо на колата да намали скоростта си от  $v'$  до  $v''$ :

$$(8) \quad t' = \frac{v' - v''}{a'}.$$

От (8) и от закона за пътя при равнозакъснително движение намираме, че за да намали скоростта си до  $v''$ , при движение по инерция колата ще измине път:

$$(9) \quad s = v't - \frac{1}{2} a't^2 = \frac{v'^2 - v''^2}{2a'}.$$

Отгук с помощта на (4), (5) и (6) получаваме:

$$(10) \quad s = \frac{v' - v''}{v' + v''} \frac{v_2 + v_1}{v_1 - v_2} \frac{v_2 + v_1}{2} t_0$$

Като заместим в този израз зададените в условието стойности на величините, намираме, че без натиснат педал на спирачките, колата ще измине  $s = 180$  m, преди скоростта ѝ да падне до 60 km/h. Тъй като получихме, че  $s < s_0$ , не е необходимо да се използват спирачки, за да се спази ограничението на скоростта.

Обърнете внимание, че отговорът на поставения въпрос не зависи от масата на колата. Дали карате лека кола или огромен ТИР, ако при движение “по инерция” за 5 s скоростта от 120 km/h падне до 105 km/h, няма нужда да задействате спирачките пред поста на КАТ.

*Втори начин. В предложено решение има пункт, който не е обоснован. Нещо повече – както ще се види по-долу, при друг начин на разсъждаване се получава и друг резултат.*

Въпросът е следният: защо във формулите (3) и (5) използваме именно средно аритметичните стойности, а не например средно квадратичните, средно геометричните или някакви дефинирани по друг начин средни стойности?

Да разгледаме следния алтернативен начин на разсъждение, който води до друг краен резултат. При скорост  $v_1$  силата на съпротивление е  $F_1 = kv_1^2$ , а при скорост  $v_2$  –  $F_2 = kv_2^2$ . Средно аритметичната стойност на силата е:

$$(11) \quad F_{\text{cp.}} = \frac{F_1 + F_2}{2} = k \frac{v_1^2 + v_2^2}{2} = ma_{\text{cp.}}$$

Като използваме за  $a_{\text{cp.}}$  израза (1), за коефициента  $k$  получаваме израза:

$$(12) \quad k = 2m \frac{v_1 - v_2}{t_0(v_1^2 + v_2^2)}.$$

Той се различава съществено от формула (4): според (4)  $k$  зависи от средно аритметичната, а според (12) – от средно квадратичната стойност на скоростта в интервала  $(v_1, v_2)$ . (Въпреки различието, ако пресметнем  $k$  по двете формули, при конкретните числени стойности и в двата случая получаваме  $k = 8,47 \cdot 10^{-4}$  kg/m, като разликата е едва в третия знак след десетичната запетая.)

Щом вече знаем  $k$ , силите на съпротивление при скорости  $v'$  и  $v''$  ще бъдат съответно  $F' = kv'^2$  и  $F'' = kv''^2$ , а средната сила в този интервал от скорости:

$$(13) \quad F_{\text{cp.}} = \frac{F' + F''}{2} = k \frac{v'^2 + v''^2}{2} = ma_{\text{cp.}}$$

Оттук намираме средното ускорение, а чрез него, (9) и (12), и изминатия път:

$$(14) \quad s = \frac{v_1^2 + v_2^2}{v_1 - v_2} \frac{v' - v''}{v' + v''} \frac{t_0}{2}.$$

Тази формула също се различава съществено от предишната формула (9) и ако по нея пресметнем пътя, който трябва да измине колата по инерция, за да намали скоростта си от 70 km/h до 60 km/h, ще получим съвсем различен от предишния резултат – около 470 m, т.е. почти половин километър. Ако е правилен този начин за решаване, обезателно трябва да задействаме спирачките, за да спазим ограничението за скоростта при поста на КАТ.

Ясно е, че нито първото, нито второто решения са точни, тъй като движението не е равнозакъснително, а се използват някакви трудни за обосноваване средни стойности на сили и на скорости. И целият проблем идва от това, че заради квадратичната зависимост на силата от скоростта, средно аритметичното на силите в началото и в края на един интервал време не е право пропорционално на средно аритметичното на скоростите в тези два момента.

Задачата обаче е коректна и би трябвало да има точно решение. Можем ли да отговорим на въпроса кое от двете предложени решения е по-близо до точното?

*Точно решение.* Отговорът на последния въпрос е утвърдителен, но, за да го получим, трябва да излезем (макар и не чак толкова много) извън рамките на училищната математика. Разбира се, въпросното решение ще бъде точно в рамките на предположението, че **цялата** сила на съпротивление е пропорционална на квадрата от скоростта. В този случай уравнението на движение на колата е:

$$(15) \quad ma = -kv^2,$$

или, като вземем предвид, че  $a = \frac{dv}{dt}$ :

$$(16) \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}v^2.$$

Това е едно обикновено диференциално уравнение с разделящи се променливи:

$$(17) \quad \frac{dv}{v^2} = -\frac{k}{m}dt.$$

След интегрирането му получаваме:

$$(18) \quad -\frac{1}{v} = -\frac{k}{m}t + C,$$

където  $C$  е засега неопределена интеграционна константа. Нейната стойност намираме от условието, че в началния момент  $t = 0$  скоростта на колата е  $v_1$ . Чрез това условие

получаваме  $C = -\frac{1}{v_1}$  и тогава (18) придобива вида:

$$(19) \quad \frac{1}{v} = \frac{k}{m}t + \frac{1}{v_1}.$$

Ако решим това равенство спрямо  $v$ , ще получим закона за скоростта. Като заместим в (19)  $t = t_0$  и  $v = v_2$ , получаваме възможност да изразим неизвестния коефициент  $k$  чрез дадените величини и масата на автомобила:

$$(20) \quad k = \frac{m}{t_0} \frac{v_1 - v_2}{v_1 v_2}.$$

Виждаме, че този израз е различен както от (4), така и от (12). Въпреки това чрез него за  $k$  се получава стойност, която се получава с по-малко от 1 % от стойностите, пресметнати по другите две формули!

След като вече имаме израз за  $k$ , можем да преминем към решаване на “проблема КАТ”. И в този случай скоростта ще се определя от равенство (19), но сега в него вместо  $v_1$  трябва да поставим началната скорост  $v'$ :

$$(21) \quad \frac{1}{v} = \frac{k}{m}t + \frac{1}{v'}.$$

Оттук при  $v = v''$  определяме времето  $t$ , за което скоростта намалява до  $v''$ :

$$(22) \quad \frac{1}{v''} = \frac{k}{m}t + \frac{1}{v'},$$

т.е.

$$(23) \quad t = \frac{m}{k} \frac{v' - v''}{v' v''}.$$

По-нататък проблемът е да се намери пътят  $s$ , който ще измине колата за време  $t$ . За целта ще намерим закона за пътя, като първо решим (21) спрямо  $v$  и отчетем, че  $v = \frac{ds}{dt}$ . Така за  $s$  получаваме диференциалното уравнение:

$$(24) \quad \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\frac{k}{m}t + \frac{1}{v'}},$$

чиито променливи също се разделят. И в този случай интегрирането може да се проведе в елементарни функции:

$$(25) \quad s = \int \frac{dt}{\frac{k}{m}t + \frac{1}{v'}} + C' = \frac{m}{k} \ln \left( \frac{k}{m}t + \frac{1}{v'} \right) + C',$$

където  $C'$  е нова интеграционна константа. Нейната стойност определяме като знаем,

че при  $t = 0$  изминатият път е  $s = 0$ . Така получаваме, че  $C' = \frac{m}{k} \ln v'$ . Като заместим  $C'$  в

(25), за закона за пътя окончателно получаваме:

$$(26) \quad s = \frac{m}{k} \ln \left( 1 + \frac{kv'}{m}t \right).$$

За да намерим пътя, изминат от колата за време  $t$ , заместваме в (26)  $t$  с израза от дясната страна на (23), а  $k$  – от равенство (20). Така получаваме:

$$(27) \quad s = t_0 \frac{v_1 v_2}{v_1 - v_2} \ln \frac{v'}{v''}.$$

Ако заместим с числените стойности, ще получим  $s \approx 180$  m – една стойност, изключително близка до вече получената по формула (10).

Следователно първият приблизителен начин на решаване дава стойност, по-близка до истинската, отколкото вторият. Затова направеният там извод, че няма нужда да е задействат спирачките, остава в сила.

#### **Теми за размисъл.**

**1.** Вече се убедихме, че макар и различни, при зададените в условието числа трите формули за  $k$  дават практически една и съща стойност. Плод на случайност ли е това? Дали и съвпадението между стойностите за  $s$ , получени по формулите (27) и (10) също не е резултат на подобна случайност, а при други стойности на скоростите и на времето  $t_0$  да се окаже, че по-близка до истинската стойност на  $s$  е тази, пресметната по формула (14)? Едно сравнение между трите формули за  $s$  ((10), (14) и (27)) показва, например, че в тях зависимостта от  $t_0$  е една и съща, така че една промяна на интервала време, който се използва за определяне на коефициента  $k$  няма да промени съотношението между резултатите, получени по трите начина. По-сложен обаче е въпроса как избора на стойностите за скоростите влияе върху тези резултати.

**2.** Можете ли да приведете доводи в полза на първия или на втория приблизителни начини за решаване на задачата. Или да предложите трети приблизителен начин?