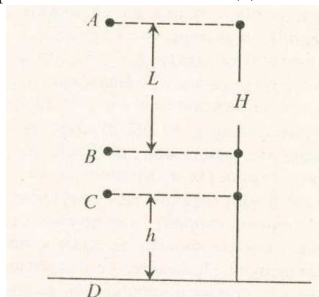


Отново бърнджи-скок

Физиката на атрактивните бърнджи-скокове дава възможност за съставяне на разнообразни задачи, решенията на повечето от които не изискват излизане извън рамките на училищната математика и физика. Една подобна задача е следната.

Задача. Човек скача от мост с височина $H = 50$ m. За обезопасяване той е привързан за единия край на въже, другият край на което е прикрепен за перилата на моста. Дължината L и еластичността на въжето са подбрани така, че човекът достига водната повърхност под моста със скорост нула. След затихване на люлеенията се оказва, че той виси на височина $h = 10$ m. Намерете максималната скорост v при падането, както и дължината на въжето, ако съпротивлението на въздуха и масата на въжето се пренебрегват.

Анализ. За да определим на каква височина над водата скоростта на човека е максимална, трябва да анализираме етапите на падането. Началният етап AB (фиг. 1),



Фиг. 1.

чиято дължина е равна на дължината на въжето, е етап на свободно падане. В следващия етап въжето започва да се разтяга, но силата на еластичност, с която то действа на човека нагоре, е по-малка от силата на тежестта и затова движението продължава да бъде ускорително, макар и с намаляващо ускорение. Така се достига равнището на т. C , в която двете сили се изравнява и по-надолу вече силата на еластичността е по-голяма от силата на тежестта – оттук нататък скоростта започва да намалява. Следователно търсената максимална скорост се достига на височината на т. C , където силата на тежестта е равна на силата на еластичност. И – тук е ключът към решението! – това е точно зададената в условието височина h , на която люлеенията спират.

Фактът, че са зададени височините H и h , а се търси скорост, подсказва, че задачата допуска решение чрез енергетичния подход, т.е. в случая – чрез закона за запазване на механичната енергия за системата човек–Земя, в която действат две консервативни вътрешни сили – гравитационната сила и силата на еластичност на разтягащото се въже.

Решение. Да означим с k коефициента на еластичност на въжето и с m – масата на човека. Като отчитаме гравитационната потенциална енергия от равнището на водата под моста, началната енергия на разглежданата система (т.е. потенциалната енергия в т. A) е:

$$(1) \quad E_A = mgH.$$

Енергията в т. C е сума от кинетичната енергия на човека, гравитационната потенциална енергия на височина h и енергията на разтегнатото с $(H - L - h)$ въже:

$$(2) \quad E_C = \frac{mv^2}{2} + mgh + \frac{k}{2}(H - L - h)^2.$$

(От фигурата се вижда, че $L + h < H$.)

Накрая, в т. D кинетичната (по условие!) и гравитационната потенциална енергия са нула, така че общата енергия там е:

$$(3) \quad E_D = \frac{k}{2}(H - L)^2,$$

тъй като разтягането на въжето в тази точка е $H - L$.

Законът за запазване на енергията, приложен за състоянията на системата в т. A и т. C , както и за тези в т. A и т. D , осигурява две равенства:

$$(4) \quad mgH = \frac{mv^2}{2} + mgh + \frac{k}{2}(H - L - h)^2$$

$$(5) \quad mgH = \frac{k}{2}(H - L)^2.$$

Към тях може да се добави условието, което изразява факта, че на височина h двете сили – силата на тежестта и силата на еластичност, се уравниават:

$$(6) \quad mg = k(H - L - h).$$

Ако разделим всяко от трите последни равенства с m , виждаме, че неизвестните в тях са три величини – търсените скорост v и дължина L , както и отношението k/m . Следователно връзките са достатъчни на брой за определяне на неизвестните.

За да намерим L , е най-просто да разделим (5) на (6). Така получаваме едно равенство с единствено неизвестно – L , от което определяме:

$$(7) \quad L = \sqrt{H^2 - 2hH}.$$

След това, като отчетем равенство (6), множителят $k(H - L - h)$ в (4) можем да заменим с mg , което дава възможност да съкратим на неизвестната маса и да получим уравнение със само едно неизвестно – v :

$$v^2 = g(H - h - L).$$

Оттук, като отчетем (7), за търсената максимална скорост получаваме:

$$(8) \quad v = \sqrt{g \left[H - h - \sqrt{H^2 - 2hH} \right]}.$$

След заместване на числените стойности на зададените величини в (7) и (8) пресмятане на получените изрази, намираме $L \approx 39$ m и $v \approx 28$ m/s.

Допълнително търсене. Данните от задачата позволяват да се намерят периодът и амплитудата в началото на люлеенията – намерете ги.