От качествени към количествени разглеждания

Качествена задача: Две материални точки A и B започват да се движат едновременно под действие на сили с постоянни посоки. Силата, която действа на т. A има постоянна големина, а големината на силата, която действа на т. B се изменя така, че нейната мощност не се променя с времето[1]. Опишете качествено как се изменят с течение на времето: съотношението между ускоренията им, съотношението между скоростите им и съотношението между изминатите от тях пътища.

Решение: Означаваме съответно с m_i – масите, с a_i – ускоренията, с v_i – скоростите, с s_i – изминатите пътища от двете точки в даден момент от времето t, а с F_i – действащите им сили (i = 1 за т. A, i = 2 за т. B). Тъй като движенията са праволинейни, всички величини ще смятаме положителни (a_i, v_i и F_i представляват проекциите на съответните вектори върху посоката на движение).

Началните скорости на двете тела са нула. Според втория принцип на Нютон ускорението на т. A при $t = 0$ е $a_1 = \dfrac{F_1}{m_1} = \text{const}$. С т. B положението е по-сложно, защото на нея й действа сила, чиято мощност $P_2 = \text{const} \neq 0$. От връзката $P_2 = F_2 v_2$ следва, че щом в началния момент $v_2 = 0$, то силата F_2 трябва да е безкрайно голяма (за да може произведението й със скоростта да бъде крайна величина). Но, отново по втория принцип на Нютон, безкрайно голяма сила би придала на т. B безкрайно голямо ускорение, независимо от масата на т. B.

От тези разсъждения следва, че в началото на движенията $a_2 > a_1$. От връзката $F_2 = \dfrac{P_2}{v_2}$ следва, че с течение на времето, заедно с нарастване на скоростта v_2 ще намалява F_2, а с нея (поради $a_2 = \dfrac{F_2}{m_2}$) – и ускорението a_2 на т. B. Така се достига до момента τ’, в който ускоренията на двете точки се изравняват, т.е. $a_1 = a_2$.

Тъй като в интервала $0 < t < \tau'$ е изпълнено неравенството $a_1 < a_2$, а началните скорости на двете тела са равни, то в този времеви интервал ще са изпълнени неравенството: $v_1 < v_2$ и $s_1 < s_2$.

След момента τ’ скоростта v_2 продължава да расте ($a_2 > 0$!), а $F_2 = \dfrac{P_2}{v_2}$ и $a_2 = \dfrac{F_2}{m_2}$ – да намаляват. В същото време $a_1 = \text{const}$ и затова скоростта v_1 на т. A, нараствайки по-бързо, в един момент τ’’ се изравнява със скоростта v_2 на т. B. Тъй като през целия интервал $0 < t < \tau''$ съотношението между скоростите е $v_1 < v_2$, то в този интервал и съотношението между изминатите пътища ще бъде $s_1 < s_2$.

След момента τ’’ неравенствата между ускоренията и скоростите са съответно: $a_1 > a_2$ и $v_1 > v_2$. Затова т. A постепенно настига т. B и в един момент τ’’’ изминатите от тях пътища се изравняват – $s_1 = s_2$. От този момент нататък и ускорението, и скоростта, и изминатият път от т. B са по-малки от съответните величини, характеризиращи движението на т. A.

Количествена задача: Като използвате въведените означения, покажете, че отношенията τ’’/τ’ и τ’’’/τ’ не зависят от масите на частиците и от силите. Пресметнете стойностите на отношенията между ускоренията, между скоростите и между пътищата в трите посочени момента. Постройте графики, които показват как тези отношения се променят с времето.

[1] Сили, действащи с постоянна мощност, имат отношение към движението на превозните средства (велосипеди, леки коли и т.н.).

Решение. Тъй като движението на т. *A* е равноускорително, законите за ускорението, за скоростта и за изминатия път имат вид съответно:

(1) $$a_1 = \frac{F_1}{m_1}$$

(2) $$v_1 = a_1 t = \frac{F_1}{m_1} t$$

(3) $$s_1 = \frac{1}{2} a_1 t^2 = \frac{1}{2} \frac{F_1}{m_1} t^2$$

Движението на т. *B* е по-сложно – то не е равноускорително. Законите за ускорението и скоростта може да се получат чрез **енергетичния** подход, според който във всеки момент кинетичната енергия $\frac{m_2 v_2^2}{2}$ на точката е равна на извършената от силата F_2 работа, която от своя страна е равна на $P_2 t$, т.е. $\frac{m_2 v_2^2}{2} = P_2 t$, от където намираме закона за скоростта:

(4) $$v_2 = \sqrt{\frac{2P_2}{m_2}} \sqrt{t} \ .$$

Оттук, чрез диференциране, може да се намери ускорението, но по очевидни причини ние ще избегнем тази операция. Щом имаме израз за v_2, от връзката $P_2 = F_2 v_2$ определяме $F_2 = \frac{P_2}{v_2} = \sqrt{\frac{m_2 P_2}{2t}}$, а чрез силата – и ускорението:

(5) $$a_2 = \frac{F_2}{m_2} = \sqrt{\frac{P_2}{2m_2}} \frac{1}{\sqrt{t}} \ .$$

За намиране на закона за пътя на т. *B* обаче използването на елементи от висшата математика е неизбежно. За целта записваме (4) във вида:

$$\frac{ds_2}{dt} = \sqrt{\frac{2P_2}{m_2}} \sqrt{t}$$

и интегрираме, като отчитаме, че при $t = 0$ и $s_2 = 0$. Така за търсения закон на пътя получаваме:

(6) $$s_2 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2P_2}{m_2}} t^{3/2} \ .$$

Тъй като в момента τ' ускоренията на двете точки СА равни, чрез формулите (1) и (5) и равенството $a_1 = a_2$ намираме:

(7) $$\tau' = \frac{m_1^2 P_2}{2 m_2 F_1^2} \ .$$

По аналогичен начин от (2) и (4) и равенството $v_1(\tau'') = v_2(\tau'')$ определяем момента τ'':

(8) $$\tau'' = \frac{2 m_1^2 P_2}{m_2 F_1^2} \ .$$

Накрая, от (3) и (6), приравнявайки $s_1(\tau''') = s_2(\tau''')$, определяме:

(9) $$\tau''' = \frac{32}{9} \frac{m_1^2 P_2}{m_2 F_1^2} \ .$$

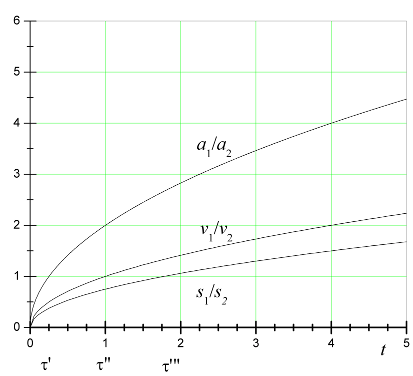
От (7), (8) и (9) се вижда, че наистина отношенията $\frac{\tau''}{\tau'} = 4$ и $\frac{\tau'''}{\tau'} = \frac{64}{9}$ не зависят нито от масите на телата, нито от действащите сили.

Ако чрез получените изрази (7), (8) и (9) и формулите (1) – (6) пресметнем стойностите на отношенията a_1/a_2, v_1/v_2 и s_1/s_2 в моментите τ', τ'' и τ''', ще се убедим, че те не зависят нито от масите на двете тела, нито от силата, която действа на т. *A*, нито от мощността на силата, която действа на т. *B*. Получените стойности за отношенията може да се подредят в следната таблица:

	τ'	τ''	τ'''
a_1/a_2	1	2	8/3
v_1/v_2	1/2	1	4/3
s_1/s_2	3/8	3/4	1

Като въведем означението $k = \frac{F_1}{m_1}\sqrt{\frac{m_2}{2P_2}}$, от (1) и (5), от (2) и (4), от (3) и (6) за отношенията на ускоренията, на скоростите и на пътищата намираме съответно:

(10) $$\frac{a_1}{a_2} = 2k\sqrt{t} \qquad \frac{v_1}{v_2} = k\sqrt{t} \qquad \frac{s_1}{s_2} = \frac{3}{4}k\sqrt{t}\,.$$



Фиг. 1.

На фиг. 1 се показани графиките на трите криви.

От приведеното решение се вижда, че с изключение на величините, свързани с изминатите пътища, всички останали може да се намерят със средства, достъпни на учениците от 8. клас.