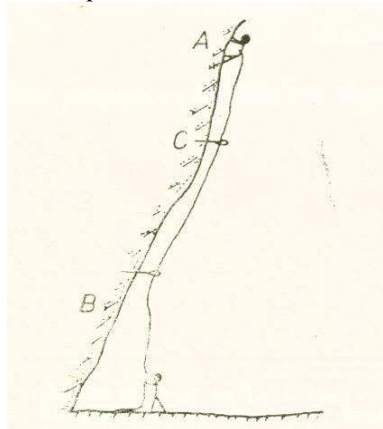


Алпинисти

За осигуряване при скално катерене алпинистите използват въже, като при евентуално падане разчитат на неговите еластични свойства. (При неразтегливо въже падането дори от малка височина теоретично би довело до травма. Когато опасността от удари в скалите не се отчита, възможността за получаване на травма се определя от максималното ускорение при спиране на падането. На практика например се приема, че падането не е опасно, ако това ускорение (всъщност – закъснение!) не надминава $25g$, където g е ускорението на свободното падане.)

Задача. Покажете, че вероятността за получаване на травма не зависи от височината на падането (т.е. от разстоянието между точката, от която алпинистът полита надолу и най-високата от точките на закрепване на въжето). Разбира се, предполага се, че границата на еластичност на въжето не се достига.

Решение. На фиг. 1 е показан привързан с въже катерач, който започва да пада от т. A . Подсигурява го колегата му на земята, който държи края на въжето, с което е привързан катерачът. Самото въже минава през халките на забитите в скалата клинове, най-високо разположеният от които е в т. C .



Фиг. 1.

Да означим с m масата на алпиниста, с l – разстоянието между т. A и т. C , с E – коефициента на еластичност на материала, от който е направено въжето. Максимално ускорение a алпинистът има в момента, когато под действие на породената от разтягането на въжето сила на еластичност F падането спре на височината на т. B . Тъй като възможността за получаване на травма се определя от a , за изразяването му използваме втория

принцип на Нютон:

$$(1) \quad a = \frac{F - mg}{m} = \frac{F}{m} - g,$$

като сме отчели, че в момента на спирането върху човека освен F действа и насочената надолу сила на тежестта.

Големината на силата на еластичност може да се намери, като се използва законът за запазване на механичната енергия. Тъй като в т. A и в т. B алпинистът е неподвижен, потенциалните енергии в тези две точки трябва да са равни. Ако отчитаме гравитационната потенциална енергия от равнището на т. C , то в т. A тази енергия е $mg l$. Ако означим с Δl удължението на въжето, то в т. B потенциалната енергия е сума от гравитационната потенциална енергия $mg(l + \Delta l)$ и потенциалната енергия $\frac{1}{2}k(\Delta l)^2$ на разтегнатото въже (тук с k е означен коефициентът на еластичност на въжето). Математически израз на закона за запазване на енергията в случая е равенството:

$$(2) \quad mg l = -mg(l + \Delta l) + \frac{1}{2}k(\Delta l)^2.$$

От закона на Хук¹ $F = E \frac{\Delta l}{l}$ и връзката $F = k \Delta l$ намираме, че $k = \frac{E}{l}$. Като заместим последния израз в (2), за удължението получаваме квадратното уравнение:

¹ Вж. напр. *Физика за 8. клас на ЕСПУ*, С., Народна просвета, 1980.

$$(\Delta l)^2 - 2 \frac{mgl}{E} (\Delta l) - 4 \frac{mgl^2}{E} = 0,$$

чието решение е:

$$(3) \quad \Delta l = l \left(\frac{mg}{E} + \sqrt{\left(\frac{mg}{E} \right)^2 + 4 \frac{mg}{E}} \right).$$

Следователно силата на еластичност в края на падането е:

$$F = E \frac{\Delta l}{l} = mg + \sqrt{m^2 g^2 + 4mgE},$$

и като използваме (1), намираме:

$$(4) \quad a = g \sqrt{1 + \frac{4E}{mg}}.$$

Този израз показва, че наистина максималното ускорение, а заедно с него и опасността от травма, не зависят от височината l . Същият израз показва още, че при по-голям коефициент на еластичност на материала на въжето – всъщност, модулът на Юнг, по-голяма е и опасността от травма. Ето защо никой алпинист не се осигурява със стоманено въже. Същевременно обаче еластичността трябва да бъде достатъчно голяма, за да спре падането преди човекът да се удари в земята.