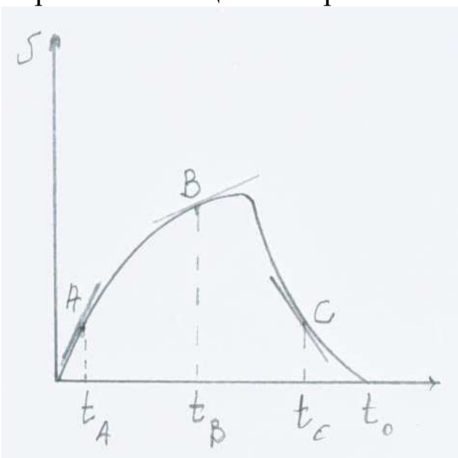
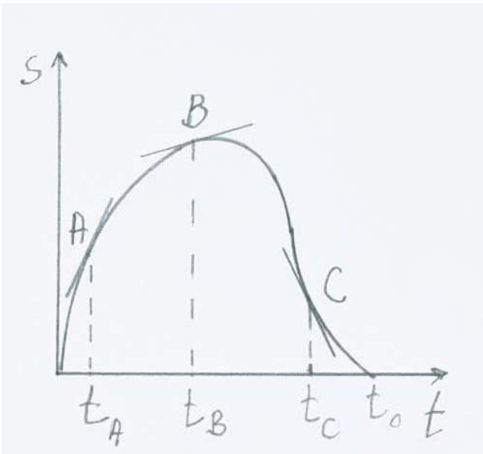
Силата на графичния метод

Задача. Неподвижно тяло започва да се движи праволинейно и еднопосочно. След интервал време t_0 тялото спира, като изминатият от него път се оказва равен на s. Покажете, че при движението непременно е имало поне един интервал време, в който ускорението на тялото по абсолютна стойност е било по.голямо от $4\frac{s}{t_0^2}$[1].

Решение. Поради еднопосочността на движението, проекцията на скоростта на тялото върху посоката на движение е положителна. Щом началната и крайната скорост на тялото са нула, обезателно в някои моменти ускорението е било положително, а в други – отрицателно. Ето защо графиката на **скоростта** като функция на времето в общия случай би изглеждала като на фиг. 1. Според условието на задачата, площта, заградена от кривата и абсцисата е равна на s – на изминатия път.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

На фиг. 2 е изобразена графика на **пътя**, изминат от едно тяло, което се движи по права и след известно време се връща в изходното си положение. Подобни графики се използват в училище. Известно е, че колкото по-стръмна е допирателната към кривата в дадена точка, толкова по-голяма е моментната скорост в съответния момент. С други думи големината на наклона е мярка за промяната на пътя за единица време. Така например $v_A > v_B$. Там, където наклонът е обратен (както в т. C), скоростта е отрицателна, което означава че тялото се движи към точката, от която е започнало движението.

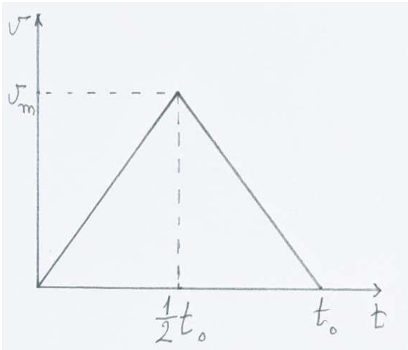
По аналогия с фиг. 2 може да се разсъждава и върху фиг. 1. В случая обаче наклонът в даден момент ще бъде мярка за *ускорението*, т.е. за промяната на скоростта за единица време. Така например $a_A > a_B$, защото допирателната в т. A е по-стръмна от допирателната в т. B. В т. C пък допирателната е с обратен наклон, което означава, че там ускорението е отрицателно и затова скоростта намалява.

Всичко дотук всъщност е подготовка за решаването на задачата. Нека разгледаме един конкретен, в известен смисъл най-прост случай на движение, отговарящо на описаното в условието на задачата: нека през първата половина от интервала t_0 тялото се движи с ускорение a = const, а през втората половина – равнозакъснително със същото по абсолютно стойност ускорение. Графиката на скоростта като функция на времето би изглеждала като на фиг. 3. Големината на ускорението трябва да подберем така, че общият изминат път да бъде s. Това означава, че площта на образувания от графиката и абсцисата равнобедрен триъгълник трябва да бъде s. Тъй като височината на

---

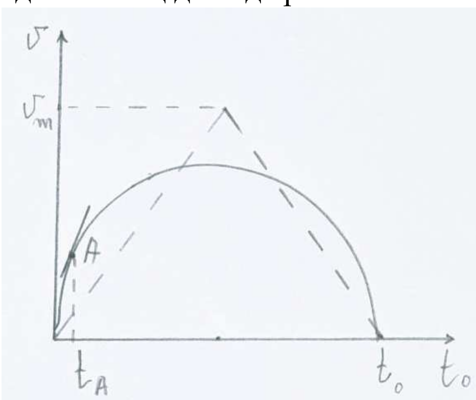
[1] В книгата си *Задачи с изюминкой* (М., "Мир", 1975) авторът, американският педагог Чарлз Триг, добавя в условието на задачата изречението: "*Ние, разбира се, предполагаме, че както скоростта v, така и ускорението a зависят от времето t непрекъснато.*" Смятам, че дори в един сборник със математически задачи това уточнение да е необходимо, за повечето физици то е подразбиращо се от само себе си.

триъгълника е $v_m = a\frac{t_0}{2}$, а основата му – t_0, въпросната площ е $s = \frac{1}{2}v_m t_0 = a\frac{t_0^2}{4}$. Оттук следва, че при **равно**ускорително–**равно**закъснително движение големината на ускорението през целия интервал време е $a = 4\frac{s}{t_0^2}$.

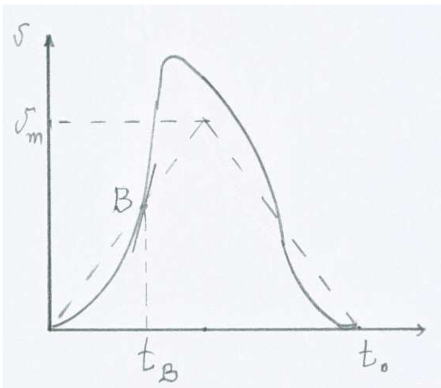


Фиг. 3.

Какви графики на скоростта може да имаме при произволна промяна на ускорението по време на движение? – най-разнообразни, но с единствено ограничение заградената под тях площ да бъде равна на площта на триъгълника от фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

На фиг. 4 е изобразен случай, в който максималната скорост е по-малка от v_m, а на фиг. 5 когато максималната скорост е по-голяма от v_m. Вижда се, че и в двата случая върху графиките има точки (напр. т. A и т. B), в които наклона на допирателната е по-голям, отколкото наклона на реброто на равнобедрения триъгълник. Това показва, че в тези точки ускорението е по-голямо от $4\frac{s}{t_0^2}$ – което трябваше да се покаже.

От тази задача се вижда, че не само в математиката се срещат "доказателства за съществуване", в които няма и намек за това, как да се намери това, за което е доказано, че съществува. Разгледаният случай е от този род: ако трябва да отговорим в кой момент ускорението е по-голямо от $4\frac{s}{t_0^2}$, очевидно трябва да зададем по някакъв начин (като функция, графично, таблично...) конкретната зависимост на скоростта от времето.