Куриоз – супер проста задача със супер сложно решение
(или – как се стреля с топ по врабче)

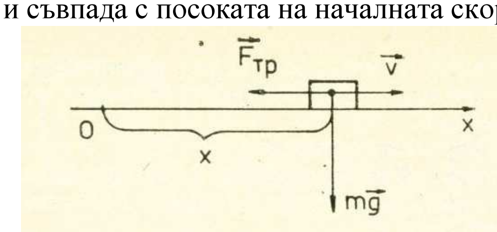
Всеки ученик, който е учил за сила на триене и втория принцип на Нютон, трябва да може да реши следната проста задача:

Тяло се хлъзга по хоризонтална равнина. Коефициентът на триене между тялото и равнината е k, началната скорост на движението – v_0. *Колко дълъг път ще измине тялото да спирането си?*

Решението на задачата е елементарно: силата на триене има големина $F = mkg$, където m е масата на тялото, а g – земното ускорение. Тъй като други сили в хоризонтално направление не действат, според втория принцип на Нютон ускорението на тялото има големина $\frac{F}{m} = kg$. Движението е равнозакъснително и законът за това движение има вид:

(1) $$x(t) = v_0 t - \frac{1}{2} kgt^2 ,$$

като началото т. O на оста Ox, по която става движението, е в началната точка на движението, а посоката и съвпада с посоката на началната скорост (фиг. 1).



Фиг. 1.

Тялото спира движението си в момент t_0, който се определя от закона за скоростта:

(2) $$0 = v_0 - kgt_0, \qquad \text{т.е. при} \qquad t_0 = \frac{v_0}{kg} .$$

Като заместим този израз в (1), за търсения изминат път получаваме:

(3) $$s = x(t_0) = \frac{v_0^2}{2kg} .$$

Така поставената задача и решението й не предизвикват никакви допълнителни въпроси, защото от физични съображения ние предварително знаем, че щом има триене и на тялото не действат никакви други сили в посока на оста Ox, то движението непременно ще спре.

Да погледнем сега същата задача с очите на хора, които знаят малко повече, отколкото се съдържа в гимназиалната физика. По същество задачата е от динамика на материална точка и всъщност законът за движението (1) трябва да се получи чрез решаване на основното уравнение на динамиката:

(4) $$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F .$$

Като отчетем, че големината на триенето е $F = mkg$, а посоката му е противоположна на посоката на скоростта, стигаме до следното обикновено диференциално уравнение:

(5) $$\frac{d^2 x}{dt^2} = -kg .$$

След еднократно интегриране и налагане на граничното условие $v(0) = v_0$ намираме закона за скоростта:

(6) $$v(t)=\frac{dx}{dt}=v_0-kgt\ .$$

Повторното интегриране и отчитане на другото начално условие ($x(0) = 0$) води до закона за движение:

(7) $$x(t)=v_0t-\frac{1}{2}kgt^2\ ,$$

т.е. – до формула (1).

В това решение смущава следния факт. Известно е, че познаването на действащата сила, на началното положение и на началната скорост са достатъчни за намиране на положението и на скоростта на тялото във ***всеки*** момент, т.е. за ***всяка*** стойност на t. При извода на формулите (6) и (7) обаче нямаше никакви ограничения върху времето t! Ако обаче ги приложим за $t>t_0=\frac{v_0}{kg}$, ще получим, че тялото се движи равноускорително с ускорение kg в посока, противоположна на посоката на оста Ox, т.е., че се връща назад – нещо, което от физични съображения е абсурд: ние знаем, че в момента $t_0=\frac{v_0}{kg}$ тялото спира да се движи и остава неподвижно на разстояние s (вж. формула (3)) от т. O.

Откривайки скоба ще отбележим, че същото диференциално уравнение (5) при $k = 1$ описва движението на тяло, хвърлено вертикално нагоре, ако съпротивлението на въздуха се пренебрегва. В този случай, при ос Ox насочена нагоре, неговото решение:

$$x(t)=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$$

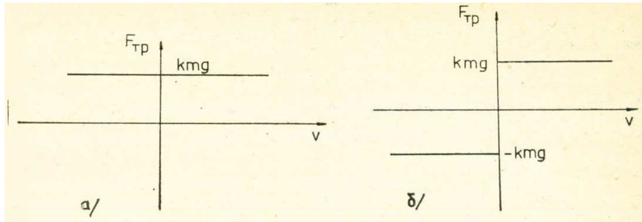
описва правилно движението на тялото при всяка стойност на t – от него следва, че при $t>\frac{v_0}{g}$ тялото пада свободно надолу, връщайки се към началното си положение.

Разликата между двата случая е очевидна – на хвърленото тяло силата на тежестта действа **постоянно**, независимо от това движи ли се или не се движи, както не зависи и от посоката на скоростта. Силата на триене обаче действа само, когато тялото се движи, а посоката й зависи от посоката на скоростта – двете посоки са противоположни. Когато тялото е неподвижно върху хоризонталната равнина, липсва сила, която да го ускорява по нея.

С други думи, силата на триене, макар и да не зависи от положението на тялото, зависи от неговата скорост. Полагайки в уравнение (4) $F=-mkg$, ние не отчитаме, че от $v_0 = 0$ следва $F = 0$, както не отчитаме и смяната на посоката на силата, при една евентуална смяна на посоката на движение. Ако искаме да отчетем тези особености на триенето, би трябвало да пишем:

(8) $$\begin{aligned} &F=-mkg && \text{за } \frac{dx}{dt}=v>0 \\ &F=0 && \text{за } \frac{dx}{dt}=v=0\ . \\ &F=mkg && \text{за } \frac{dx}{dt}=v<0 \end{aligned}$$

Това означава, че графиката на проекцията на вектора $\vec{F}$ върху оста Ox е не като на фиг. 2,а, а като на фиг. 2,б! Именно това е причината, поради която решението (7) дава физически неоправдани стойности за $x(t)$ при $t>t_0$.



Фиг. 2.

Проблемът сега е да намерим решение на задачата, което да бъде валидно за всяко *t*.

За да запишем коректно уравнението за движение, трябва първо да намерим израз за F, който е валиден за произволна скорост v. (Разбира се, оставаме в рамките на предположението, че големината на триенето не зависи от големината на скоростта и се описва с произведението kmg.

Функцията $F = F(v)$, зададена с равенство (8), е определена за всяка стойност на v, като при $v = 0$ търпи краен скок. В такива случаи, когато за подобна функция трябва да се запише единен израз, валиден за всяка стойност на аргумента, често се използва функцията sign v (т.е. знакът на v), която се дефинира с равенствата:

$$\operatorname{sign} v = \begin{cases} 1 & \text{за } v > 0 \\ -1 & \text{за } v < 0 \end{cases}.$$

Ако доопределим тази функция в нулата, като смятаме sign $v = 0$, диференциалното уравнение (4) придобива вида:

(9) $$\frac{d^2x}{dt^2} = -kg \operatorname{sign} v\,.$$

Тъй като по-нататък величините k и g се срещат само като произведение kg, удобно е да използваме означението:

(10) $$a = kg,$$

като a представлява всъщност големината на ускорението на тялото. Освен това, като отчетем, че $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$, от (9) получаваме едно обикновено диференциално уравнение от първи ред за скоростта v:

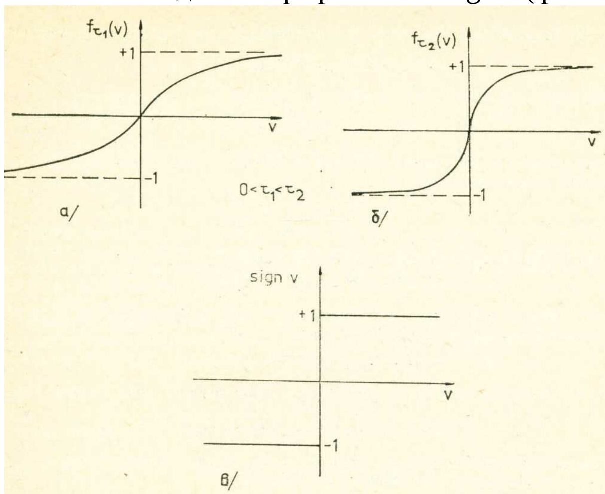
(11) $$\frac{dv}{dt} = -a \operatorname{sign} v\,.$$

Формално погледнато, това уравнение е от възможно най-простия вид – с разделящи се променливи. Дясната му страна обаче притежава една неприятна особеност: производната ѝ по v в точката $v = 0$ не е ограничена (грубо казано, тя е безкрайност). В тези случаи обикновената процедура за интегриране на такива уравнения може да се окаже неприложима, какъвто е и разглежданият случай.

За да решим (11) без да навлизаме в теорията на диференциални уравнения с особени точки, ще използваме следния метод: ще сменим дясната страна на уравнението с непрекъсната функция на v, чиято първа производна е навсякъде ограничена и чието поведение *наподобява* поведението на sign v, като в някакъв граничен случай *съвпада* с това на sign v. Такива функции има много и една от тях е например функцията:

(12) $$f_\tau(v) = \frac{e^{\tau v} - e^{-\tau v}}{e^{\tau v} + e^{-\tau v}}\,.$$

Освен от аргумента си v, тази функция зависи още и от един параметър τ, който ще смятаме, че е положителен. На фиг. 3,а и б са показани графиките на $f_\tau(v)$ за две стойности на параметъра – τ_1 и τ_2, като $\tau_1 < \tau_2$. Очевидно е, че с нарастването на τ графиката на $f_\tau(v)$ все повече наподобява графиката на sign v (фиг. 3,в). Лесно се



Фиг. 3.

пресмята, че:

(13)
$$\lim_{\tau\to\infty} f_\tau(v) = \begin{cases} 1 & \text{за } v>0 \\ 0 & \text{за } v=0 \\ -1 & \text{за } v<0 \end{cases}.$$

Тези равенства показват, че всъщност:

(14)
$$\operatorname{sign} v = \lim_{\tau\to\infty} f_\tau(v).$$

По-нататък идеята е вместо (11), да решим уравнението:

(15)
$$\frac{dv}{dt} = -a\frac{e^{\tau v}-e^{-\tau v}}{e^{\tau v}+e^{-\tau v}},$$

което преминава в (11) при $\tau \to \infty$. Тъй като решението $v(t,\tau)$ ще зависи от параметъра τ, след намирането му в него ще направим преход $\tau \to \infty$ и ще получим решение на уравнението (11), т.е.

(16)
$$v(t) = \lim_{\tau\to\infty} v(t,\tau).$$

Решението на уравнение (15) се намира чрез разделяне на променливите и интегриране:

$$\int\frac{e^{\tau v}+e^{-\tau v}}{e^{\tau v}-e^{-\tau v}}dv = -a\int dt + C,$$

където C е подлежаща на определяне интеграционна константа. Интегралът в лявата страна се пресмята елементарно:

$$\int\frac{e^{\tau v}+e^{-\tau v}}{e^{\tau v}-e^{-\tau v}}dv = \frac{1}{\tau}\int\frac{d\left(e^{\tau v}-e^{-\tau v}\right)}{e^{\tau v}-e^{-\tau v}} = \frac{1}{\tau}\ln\left|e^{\tau v}-e^{-\tau v}\right|.$$

По такъв начин решението на (15) се намира от равенството:

(17)
$$\frac{1}{\tau}\ln\left|e^{\tau v}-e^{-\tau v}\right| = C - at.$$

Тъй като при $t = 0$ скоростта е $v = v_0$, константата C има стойност:

$$C = \frac{1}{\tau}\ln\left|e^{\tau v_0}-e^{-\tau v_0}\right|.$$

Заместваме C в (17) и след групиране на членовете получаваме едно трансцендентно уравнение за v, от което след антилогаритмуване получаваме:

$$e^{\tau v} - e^{-\tau v} = \left(e^{\tau v_0} - e^{-\tau v_0}\right)e^{-a\pi}.$$

Ако умножим двете страни на това равенство с $e^{\tau v}$ и прегрупираме членовете, стигаме до следното квадратно уравнение за $e^{\tau v}$:

$$e^{2\tau v} - \left[\left(e^{\tau v_0} - e^{-\tau v_0}\right)e^{-\tau at}\right]e^{\tau v} - 1 = 0.$$

Тъй като $e^{\tau v} > 0$, използваме само неговия положителен корен:

$$e^{\tau v} = \frac{1}{2}\left[\left(e^{\tau v_0} - e^{-\tau v_0}\right)e^{-\tau at} + \sqrt{\left(e^{\tau v_0} - e^{-\tau v_0}\right)^2 e^{-2a\pi} + 4}\right].$$

След логаритмуване и съответна преработка за решението на уравнението (15) окончателно намираме:

(18) $$v(t,\tau) = \frac{1}{\tau}\ln\left\{\frac{1}{2}\left[e^{(v_0 - at)\tau} - e^{-(v_0 + at)\tau} + \sqrt{e^{2(v_0 - at)\tau} - 2e^{2a\pi} + e^{-2(v_0 + at)\tau} + 4}\right]\right\}.$$

Според казаното по-горе, в израза (18) следва да направим прехода $\tau \to \infty$. За целта обаче е необходимо да различаваме два случая:

1. Нека $t < \dfrac{v_0}{a}$, т.е. изразът $v_0 - at > 0$. Понеже търсим решение при $t \geq 0$, то и $v_0 + at > 0$. Тогава границите на двете експоненти са съответно:

$$\lim_{\tau\to\infty} e^{(v_0 - at)\tau} = \infty \qquad \text{и} \qquad \lim_{\tau\to\infty} e^{-(v_0 + at)\tau} = 0.$$

Като имаме предвид тези равенства, от (18) получаваме:

(19) $$v(t) = \lim_{\tau\to\infty} v(t,\tau) = v_0 - at.$$

2. В другия случай $t > \dfrac{v_0}{a}$ и показателите на двете експоненти в (18) са отрицателни, така че:

$$\lim_{\tau\to\infty} e^{(v_0 - at)\tau} = 0 \qquad \text{и} \qquad \lim_{\tau\to\infty} e^{-(v_0 + at)\tau} = 0.$$

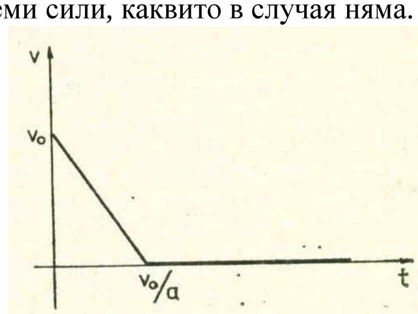
В този случай търсената граница е:

(20) $$v(t) = \lim_{\tau\to\infty} v(t,\tau) = 0.$$

И така, за скоростта на тялото получаваме:

(21) $$v(t) = \frac{dx}{dt} = \begin{cases} v_0 - at & \text{за} \quad t \leq \dfrac{v_0}{a} \\ 0 & \text{за} \quad t \geq \dfrac{v_0}{a} \end{cases}.$$

Вижда се, че въпреки скока, който търпи F при $v = 0$, скоростта на тялото е непрекъсната функция на времето (фиг. 4). Това би трябвало да се очаква и от физични съображения, защото скокообразни промени в скоростта могат да настъпят само под действие на безкрайно големи сили, каквито в случая няма.



Фиг. 4.

Вместо с равенствата (21) законът за скоростта може да се запише единно чрез т.нар. θ-функция, която се дефинира чрез равенствата:

(22) $$\theta(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{за} \quad \xi > 0 \\ 0 & \text{за} \quad \xi < 0 \end{cases}.$$

С нейна помощ равенствата (21) се записват във вида:

(23) $$v(t) = \frac{dx}{dt} = (v_0 - at)\theta(v_0 - at).$$

За нашата крайна цел – намиране закона за движение $x = x(t)$, е необходимо още едно интегриране – интегриране на (23). Преди да го извършим ще припомним основните свойства на δ-функцията на Дирак. Както е известно, тя се определя с равенствата:

(24) $$\delta(\xi - c) = \begin{cases} 0 & \text{за} \quad \xi \neq c \\ \infty & \text{за} \quad \xi = c \end{cases},$$

като:

(25) $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi - c) d\xi = 1.$$

С помощта на (24) и (25) се доказва, че ако функцията φ(ξ) няма особеност при ξ = c, то:

(26) $$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\delta(\xi - c) d\xi = \varphi(c).$$

Като имаме предвид дефиниционните равенства (24) и (25), лесно пресмятаме, че:

$$\int_{-\infty}^{v} \delta(\xi - c) d\xi = \begin{cases} 0 & \text{за} \quad v < c \\ 1 & \text{за} \quad v > c \end{cases},$$

което, сравнено с (22) показва, че:

$$\int_{-\infty}^{v} \delta(\xi - c) d\xi = \theta(v - c).$$

Когато $c > 0$, аргументът на δ-функцията не се анулира в интервала (–∞, 0) и същото равенство може да се запише като:

(27) $$\int_{0}^{v} \delta(\xi - c) d\xi = \theta(v - c) \quad \text{за} \quad c > 0.$$

Оттук следва, че производната на θ-функцията е точно функцията на Дирак:

(28) $$\frac{d}{d\xi}\theta(\xi - c) = \delta(\xi - c).$$

Тези равенства ще използваме при интегрирането на (23), което е с отделящи се променливи и може да се представи във вида:

$$dx = (v_0 - at)\theta(v_0 - at)dt.$$

Тъй като $x(0) = 0$, получаваме:

$$x(t) = \int_{0}^{t} (v_0 - a\xi)\theta(v_0 - a\xi) d\xi.$$

За пресмятане на интеграла е удобно да въведем нова интеграционна променлива:

$$\eta = v_0 - a\xi, \quad \xi = \frac{1}{a}(v_0 - \eta), \quad d\xi = -\frac{1}{a}d\eta .$$

След нейното въвеждане стигаме до интеграла:

$$x(t) = \frac{1}{a}\int_{v_0 - at}^{v_0} \eta\theta(\eta)d\eta .$$

Той се пресмята чрез интегриране по части:

$$x(t) = \frac{1}{2a}\int_{v_0-at}^{v_0} \theta(\eta)d\eta^2 = \frac{1}{2a}\left[\eta^2\theta(\eta)\Big|_{v_0-at}^{v_0}\right] - \frac{1}{2a}\int_{v_0-at}^{v_0} \eta^2\delta(\eta)d\eta =$$

$$= \frac{1}{2a}\left[v_0^2\theta(v_0) - (v_0 - at)^2\theta(v_0 - at)\right] = \frac{1}{2a}\left[v_0^2 - (v_0 - at)^2\theta(v_0 - at)\right].$$

При пресмятането сме използвали формули (28) и (26), като последната от тях гарантира, че оставащият лед интегрирането по части интеграл е нула.

И така, окончателният вид на закона за движение на тялото е:

$$x(t) = \frac{1}{2a}\left[v_0^2 - (v_0 - at)^2\theta(v_0 - at)\right] , \tag{29}$$

който е валиден за всяко $t > 0$. Като отчетем равенства (22), от (29) получаваме:

$$x(t) = \begin{cases} v_0 t - \frac{1}{2}at^2 & \text{за} \quad t \le \frac{v_0}{a} = t_0 \\ \frac{v_0^2}{2a} & \text{за} \quad t \ge \frac{v_0}{a} = t_0 \end{cases} ,$$

т.е. от момента $t_0 = \frac{v_0}{a}$ нататък тялото спира движение. Това е физически оправданото решение, освободено от посочения в началото абсурд.

Използваният метод за решаване на проблема поставя следния въпрос: доколко крайният резултат е независим от избора на функцията $f_\tau(v)$ (вж. (22)). Дали ако бяхме имитирали функцията sign v с друга непрекъсната функция, след съответния граничен преход, не бихме получили и друг закон на движението? Този въпрос остава отворен, като единствено оправдание за избора на $f_\tau(v)$ е фактът, че чрез този избор получихме точно това, което се очаква от физични съображения.

Анализът на разгледаната задача обяснява привидния парадокс, следващ от две неоспорими физични твърдения:

1. Основното уравнение на динамиката, заедно с началните условия определя движението на тялото във всеки момент.
2. При хлъзгане силата на триене зависи само от нормалния натиск и от вида на триещите се повърхности, но не и от големината на скоростта.

Очевидно второто от тях е плод на идеализация, но неговата справедливост е проверена в широк диапазон скорости. Проведеният анализ показва, че за получаване на правилно решение на задачата не е необходимо да излизаме извън рамките на тази идеализация, т.е. не е необходимо да търсим детайлната зависимост на F от v – достатъчно е да поставим математически коректно задачата.

Приведеното решение на тази най-проста задача показва, че за намирането му трябва да се приложат нетривиални математични прийоми. Това обяснява защо в сборниците със задачи по физика липсват задачи от подобен вид. Така например от физична гледна точка проста е и следната задача: тяло с маса m лежи върху хоризонтална равнина, като коефициентът на триене между равнината и тялото е k. На тялото действа сила на еластичност с големина $k'x$, насочена към фиксирана т. O. Да се намери законът за движение, ако в един начален момент тялото е изведено от равновесното си положение на разстояние x_0 от т. O и е оставено да се движи без начална скорост.

Физически е ясно, че при определено съотношение между зададените величини тялото ще извършва затихващи трептения, но ако запишем основното уравнение на динамиката с постоянна сила на триене $F = -kmg$, няма да получим подобно решение. Причината, разбира се, е сходна с тази, която бе указана в анализа на разгледаната задача.

Накрая ще отбележим, че обикновено се смята, че обобщени функции от типа на $\delta(x)$ и $\theta(x)$ са атрибут, характерен само за математичния апарат на квантовата механика и квантовата теория на полето. Разгледаният прост пример показва, че те може да се срещнат и в класическата физика. В механиката например те се появяват там, където физичните идеализации водят до сили, които имат краен скок (както в разгледания пример), сили, които са безкрайно големи, но действат безкрайно кратко време и т.н.

Предполагам, че ако сте имали търпение да проследите решението на разглежданата задача докрай, вече не се учудвате на подзаглавието, поставено в началото.