Може ли силата на съпротивление да ускорява телата?

Всеки, който макар и бегло е имал досег с физика и в частност – със задачи по физика, знае, че:

– Първо: “Силите на триене и съпротивление са насочени противоположно на скоростта на движение и затова, ако движещите сили престанат да действат, скоростта на движение намалява.”

– Второ: “Силите на триене и съпротивление постепенно преобразуват механичната енергия на една система във вътрешна енергия и, ако други източници не попълват запаса от механичната енергия, тя намалява.”

Задавали ли сте си въпроса дали двете твърдения са еквивалентни? Дали винаги, когато е приложимо първото, е приложимо и второто, и обратно? Тъй като и двете звучат достоверно, сме склонни да ги приемаме като равностойни.

Преди повече от 50 години човешката практика осигури нагледен пример за случаи, когато първото твърдение не е валидно: става дума за движението на изкуствените спътници на Земята (ИСЗ). При изстрелването им, след разделяне на последната степен на ракетата–носител и спътника, двете тела продължават движенията си независимо едно от друго. Като правило, размерите (напречното сечение) на последната степен на ракетата са по-големи от тези на спътника. Колкото и разредена да е атмосферата на стотици километра над Земята[1], при движението си там телата изпитват съпротивление. Поради разликата в размерите съпротивлението върху остатъците от ракетата е по-голямо, отколкото върху спътника. Тъй като движението е “по инерция”, т.е. няма движещи сили, въз основа на първото твърдение интуитивното очакване е ракетата постепенно да изостава от спътника. Още през 1957 г. обаче наблюденията върху първите изкуствени спътници на Земята показват тъкмо обратното – изоставала не ракетата, а спътникът.

Това движение е пример, в който първото твърдение е неприложимо. Второто твърдение обаче е универсално вярно (то всъщност е израз на закона за запазване и преобразуване на механичната енергия в системи, в които действат неконсервативни сили). То ще ни помогне да обясним наблюдавания при спътниците “парадокс”.

Предварителни бележки. Въпреки че няма обща рецепта за процедиране в подобни ситуации, когато задачата е механична и имаме намерение при решаването ѝ да използваме енергетичния подход, има едно правило, което определя от къде да започнем: най-напред трябва да изясним кои тела причисляваме към системата. Това позволява да разграничим двата вида сили – вътрешни (които действат между тела от системата) и външни (които действат на тела от системата, но произхождат от тела, които не сме причислили към нея). Това разграничение е съществено, когато се наложи да използваме определението за *енергия на система*: **нарастването на енергията на една система е равно на работата на външните сили, приложени върху телата от системата**.

В нашия случай става дума за три тела: Земя, спътник и атмосфера. Като система ще разглеждаме Земята и спътника. В тази система действа една *вътрешна* сила – гравитационната:

$$F_{\text{г}} = G\frac{mM}{r^2}, \tag{1}$$

където G е гравитационната константа, m и M – масите съответно на спътника и на Земята, а r – разстоянието на спътника до центъра на Земята. Освен това върху спътника действа и една *външна* сила – силата на съпротивление F_{c}.

---

[1] На височина 200 km плътността на въздуха е около 5.10^{-10} kg/m^3, а на височина 1000 km – 10^{-15} kg/m^3).

Тъй като гравитационната сила е консервативна, състоянието на системата се характеризира с потенциалната енергия на взаимодействието между Земята и спътника:

(2) $$E_{\text{п}} = -G\frac{mM}{r}$$[2].

При това положение пълната механична енергия на системата, т.е. сумата от кинетичната енергия $E_{\text{к}}$ на спътника и потенциалната енергия на взаимодействието, е:

(3) $$E_{\text{м}} = E_{\text{к}} + E_{\text{п}} = \frac{mv^2}{2} - G\frac{mM}{r},$$

където v е скоростта на спътника.

Дотук всичко се отнася за всяка система от две свързани с гравитационни сили тела, стига масата на едното да е много по-голяма от масата на другото, така че да можем да разглеждаме първото като неподвижно (т.е. да не отчитаме кинетичната му енергия). Оттук нататък ще направим едно опростяващо предположение, което съществено облекчава разглежданията: разглеждаме само движения, чиято траектория е **окръжност**. В този случай скоростта v може да се елиминира от израза (3) за механичната енергия. Наистина, при движение по окръжност роля на центростремителна сила играе цялата гравитационна сила – тя осигурява нормалното (центростремително) ускорение, а тангенциалното ускорение е нула, т.е. движението е равномерно. Приравняването на двете сили:

$$G\frac{mM}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

дава възможност да изразим скоростта чрез разстоянието:

(4) $$v^2 = G\frac{M}{r}$$

и за кинетичната енергия на спътника получаваме израза:

(5) $$E_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2} = G\frac{mM}{2r}.$$

Така от (5) и (3) за пълната механична енергия на системата намираме:

(6) $$E_{\text{м}} = E_{\text{к}} + E_{\text{п}} = G\frac{mM}{2r} - G\frac{mM}{r} = -G\frac{mM}{2r} < 0.$$

Виждаме, че тя наистина зависи само от разстоянието между телата (а не и от скоростта!) и е винаги **отрицателна**[3]. Тъкмо тези два факта ще ни помогнат да разберем защо съпротивлението предизвиква ускоряване на спътниците.

По такъв начин от равенството между гравитационната и центростремителната сила при движението по окръжност получаваме две важни следствия:

– От сравнението между формули (5) и (6) следва, че ***по големина*** **кинетичната енергия на тялото и пълната механична енергия на системата са равни**.

---

[2] Този израз е аналог на формулата за електричната потенциална енергия на взаимодействие на два точкови заряда – следствие от аналогията между законите на Кулон и на Нютон. Появата на знака минус в (2) се дължи на факта, че докато два едноименни заряда се отблъскват, гравитационната сила между две тела е винаги сила на привличане, независимо от това, че знаците на масите са еднакви (положителни). Максималната стойност гравитационната потенциална енергия на системата Земя–спътник е нула и се достига, когато спътникът е безкрайно отдалечен от Земята, а минималната – когато е на земната повърхност.

[3] Формула (6) демонстрира един факт, валиден за всяка система, в която действат консервативни сили, намаляващи при увеличаване на розстоянието: ако системата е *свързана*, т.е. ако частите ѝ не могат да се раздалечават на безкрайно големи разстояния, нейната пълна механична енергия е **отрицателна**.Такива системи са например атомите, техните ядра, молекулите, Слънчевата система, галактиките.

– От сравнението между формулите (2) и (5) следва, че големината на гравитационната потенциална енергия е равна на точно два пъти кинетичната енергия на тялото.

Ако от (4) и (6) елиминираме произведението GM, получаваме пряка връзка между скоростта и пълната енергия:

$$v = \sqrt{-\frac{2}{m}E_{м}}\ . \tag{7}$$

Тъй като $E_{м}$ е отрицателна величина, подкоренният израз е положителен.

Качествен анализ. Дотук не сме разглеждали влиянието на външната сила – на съпротивлението, което действа върху спътника. Като действа в противоположна на скоростта посока, то извършва отрицателна работа, вследствие на което механичната енергия $E_{м}$ на системата Земя–спътник намалява, а за сметка на това расте вътрешната енергия на системата (спътникът и въздухът се нагряват). Намаляването на една отрицателна величина обаче е свързано с увеличаване на абсолютната й скорост, а щом $|E_{м}|$ расте, според (7) ще расте и линейната скорост на спътника – това, което трябваше да обясним.

Това е математичната страна на въпроса. А малко по физично? По принцип механичната енергия $E_{м}$ на системата би могла намалее по различни начини: може да намалеят и кинетичната $E_{к}$, и потенциалната $E_{п}$ енергия, възможно е едната да намалее, а другата да се увеличи, но намалението на първата да е по-голямо от увеличението на втората и т.н. Каква е ситуацията в нашия случай? Щом линейната скорост, а значи и $E_{к}$ на спътника е нараснала, това може да стане само за сметка на такова намаляване на $E_{п}$, което е по-голямо от предизвиканото от силата на съпротивление намаление $\Delta E_{м}$ на пълната механична енергия. Наистина, от формула (6) следва, че щом $E_{м}$ намалява, намалява и радиусът на орбитата на спътника. От (2) следва, че намаляването на r означава намаляване на потенциалната енергия. И се оказва, че това намаление не само компенсира $\Delta E_{м}$, а е точно два пъти по-голямо – само половината от освободената гравитационна потенциална енергия се превръща във вътрешна енергия, докато другата половина увеличава $E_{к}$ на спътника, т.е. – неговата линейна скорост.

Да опитаме да формулираме тези разсъждения и по-кратко, и от малко по-друг ъгъл, като обърнем внимание на основния възникващ проблем: защо потенциалната енергия не намалява само толкова, колкото да покрие загубите на механична енергия от съпротивлението, а два пъти повече, като другата част увеличава кинетичната енергия?

И така:

– Първопричина за промяна на движението е наличието на съпротивление, вследствие на което механичната енергия $E_{м}$ на системата Земя–спътник намалява.

– Намаляването на $E_{м}$ води неизбежно до намаляване на радиуса на орбитата (вж. формула (6) и не забравяйте смисъла на знака минус!).

– Намаляването на радиуса предизвиква определено от формула (1) увеличаване на гравитационната сила ($F_{г} \sim 1/r^2$).

– За да се запази видът на орбитата (окръжност), т.е. да се осигури равенство между гравитационната и центростремителната сила ($F_{г} = F_{цс}$), намаляването на е r не е достатъчно, тъй като с намаляване на r силата $F_{цс}$ расте по-бавно от $F_{г}$ ($F_{цс} = \dfrac{mv^2}{r} \sim 1/r$). Точно това налага известно увеличаване линейната скорост на спътника, т.е. кинетичната му енергия $E_{к}$, така че да се осигури равенството $F_{г} = F_{цс}$.

Последното твърдение обяснява защо потенциалната енергия $E_{п}$ намалява повече, отколкото е работата на силата на съпротивление – освен онази част от началната потенциална енергия, която се превръща се във вътрешна енергия на системата, друга, допълнителна част се преобразува в кинетична енергия. До известна степен като необяснен може да се разглежда фактът, че тези две части са точно равни една на друга.

И така, погледнато от този ъгъл, причина за увеличаване на кинетичната енергия на спътника е различната зависимост на двете сили, $F_г$ и $F_{цс}$ от разстоянието – едната е обратно пропорционална на r^2, а другата – r. Ако двете сили зависеха по един и същ начин от разстоянието, след преобразуването на част от механичната енергия във вътрешна, всичко би могло да свърши с такова намаляване на радиуса на орбитата, при което намаляването на потенциалната енергия да покрие загубите. Увеличената гравитационна сила би била точно равна на необходимата за движение по новата орбита центростремителна сила и скоростта би се запазила същата. В действителност обаче гравитационната сила се оказва по-голяма от необходимото, тялото не може да се удържи на тази орбита и намаляването на радиуса продължава. Продължава дотогава, докато новото намаляване на потенциалната енергия, което увеличава кинетичната енергия и скоростта (а не води до по-нататъшно преобразуване във вътрешна енергия) не доведе отново до възстановяване на равенството $F_г = F_{цс}$.

Разбира се, процесът не се развива на стъпки така, както го описваме. Само за по-лесно разкриване на физичната му страна ние разгледахме промените в движението след завършване на една цяла обиколка по орбитата. Промените обаче настъпват непрекъснато, но, както ще стане ясно по-долу, разглеждането им от този аспект изисква съставяне и решаване на диференциални уравнения.

А какво означава "достатъчно малко"? Възлов момент в направения анализ е равенството между гравитационната и центростремителната сила, което е валидно само при *равномерно движение по окръжност*. В случаите на по-сложни траектории (елиптична, параболична, хиперболична) една част от гравитационната сила осигурява нормалното ускорение, а останалата част или ускорява, или забавя движението. Очевидно е, че орбита с намаляващ радиус не може да бъде окръжност! С други думи, разсъжденията ни имат мисъл само, ако съпротивлението е *достатъчно малко*, така че за една обиколка на спътника намаляването на радиуса на орбитата да е толкова малко, че да позволява да разглеждаме траекторията като окръжност. Ако това условие не е изпълнено, движението е по спирала, която все повече доближава земната повърхност, а преди да я достигне, най-вероятно спътникът ще изгори в по-плътните слоеве на атмосферата.

Нека опитаме да направим една по-количествена оценка. Единствената сила, с която можем да сравняваме действащото на спътника съпротивление $F_с$, е гравитационната сила $F_г$. Нека проверим дали ако е изпълнено неравенството:

(8) $$F_с << G\frac{mM}{r^2},$$

след една обиколка на спътника промяната Δr на радиуса r на орбитата му може да се смята малка. Само в този случай нашите разсъждения можем да смятаме приложими.

Нека $E_м$ е механичната енергия на спътника в началото на обиколката. Работата на силата на съпротивление по цялата обиколка е $(-F_с).2\pi r$ (знакът минус отчита, че посоките на скоростта и на съпротивлението са противоположни, т.е. работата е отрицателна). Според цитираното в началото определение за енергия, ако означим с $E_м^{'}$ механичната енергия на системата в края на обиколката на спътника, то:

(9) $$\Delta E = E_м^{'} - E_м = -2\pi r F_с.$$

С помощта на формулата за механичната енергия (6) от (9) намираме:

$$-2\pi r F_с = -G\frac{mM}{2r'} + G\frac{mM}{2r} = -G\frac{mM}{2r}.\frac{\Delta r}{r'},$$

където r' е радиусът на орбитата в края на обиколката, а $\Delta r = r - r'$ – промяната на този радиус. Като отчетем, че големината на гравитационната сила е $F_г = G\dfrac{mM}{r^2}$, последното равенство може да запишем във вида:

(10) $$\frac{\Delta r}{r'} = 4\pi\frac{F_с}{F_г}.$$

Тъй като $4\pi > 10$, равенство (10) може да тълкуваме по следния начин: относителната промяна на радиуса на орбитата за една обиколка е над 10 пъти по-голяма от отношението между силите на съпротивление и гравитация. Това означава, че ако искаме грешката, която правим с прилагане на законите за движение по кръгова орбита, да не надминава 1 %, силата на съпротивление не трябва да надминава 0,1 % от гравитационната сила.

Как скоростта и разстоянието до центъра на Земята зависят от времето?

Както често се постъпва с цел по-ясно разкриване физиката в дадено явление, дотук ние изкуствено разчленихме явлението на етапи:

– първо, работата на съпротивлението предизвиква превръщане на част от механичната енергия на системата Земя–спътник във вътрешна енергия – $E_м$ намалява;

– второ, намалението на $E_м$ е за сметка на потенциалната енергия $E_п$, което е свързано с подходящо свиване на орбитата на спътника;

– трето, намаляването на r предизвиква увеличение на гравитационната сила $F_г \sim 1/r^2$;

– четвърто, увеличената центростремителната сила създава ускорение към Земята, което е по-голямо от необходимото за удържане на спътника върху свитата орбита ($F_{цс} \sim 1/\mathrm{r}$), поради което намаляването на r продължава дори и след като е освободена достатъчно гравитационна енергия за покриване загубите на механична енергия;

– пето, окончателно намаляването на r се прекратява, когато нарастването на кинетичната енергия за сметка на потенциалната увеличи скоростта на спътника дотолкова, че той да продължи да се движи по кръгова орбита.

Ясно е, че в действителност всички тези процеси протичат във времето едновременно. Както отбелязахме по-горе, ако искаме да ги опишем, трябва да съставяме и решаваме диференциални уравнения. В случая те не са много сложни.

Да се върнем към парадокса, от който започнахме: защо все пак остатъците от ракетата-носител изпреварват спътника? С други думи – защо увеличението на скоростта на спътника е по-малко от това на ракетните остатъци?

При движение в толкова разредена атмосфера можем да приемем, че големината на силата на съпротивление е правопропорционална на скоростта v:

$$F_с = kv,$$

където k е коефициент, който зависи от плътността на въздуха, от напречното сечение на движещото се тяло, както и (евентуално) от големината на самата скорост. Работата на тази сила за единица време е:

(11) $$-F_с.v = -kv^2 = \frac{dE_м}{dt},$$

т.е. е равна на промяната за единица време на механичната енергия. Тъй като от (5) и (6) следва, че $E_м = -E_к = -\dfrac{mv^2}{2}$, чрез диференциране на това равенство по времето получаваме:

(12) $$\frac{dE_{\text{м}}}{dt} = -mv\frac{dv}{dt}.$$

От (11) и (12) получаваме едно обикновено диференциално уравнение за скоростта:

(13) $$\frac{dv}{dt} = \frac{k}{m}v.$$

Вижда се, че увеличението на скоростта зависи от отношението k/m. Напречното сечение на ракетата е по-голямо от това на спътника и при положение, че масите им са сравними, това отношение се оказва по-голямо за ракетата. Именно този факт обяснява защо тя изпреварва спътника.

Решението на (13) е:

(14) $$v(t) = v_0 e^{\frac{k}{m}t},$$

т.е. при приетия модел за силата на съпротивление, нарастването на скоростта е експоненциално (следва да се има предвид обаче, че стойността на коефициента k/m е изключително малка!).

От формула (11) можем да намерим и зависимостта на разстоянието r от спътника до центъра на Земята. За целта в дясната ѝ страна ще заместим $E_{\text{м}}$ от формула (6), а в лявата страна v^2 ще изразим чрез r от (4). След диференциране на $E_{\text{м}}$, за r получаваме уравнението:

$$\frac{1}{r}.\frac{dr}{dt} = -2\frac{k}{m},$$

чието решение отново зависи експоненциално от времето:

(15) $$r(t) = r_0 e^{-2\frac{k}{m}t}.$$

Сравнението с формула (14) показва, че в този случай показателят на експонентата е отрицателен и по големина – два пъти по-голям от този, който определя ръста на скоростта.

Какво още може да се пресметне?

1. Намерете формула, която пряко свързва Δr с промяната ΔE на механичната енергия за една обиколка на спътника (или все едно – с работата на съпротивлението), т.е. гледайте на ΔE като на нещо зададено.

2. Намаляването на механичната енергия в случая доведе до намаляване на потенциалната енергия и два пъти по-малко от него увеличение на кинетичната енергия. Не би ли могло обаче да се случи нещо друго – механичната енергия на системата да намалее за сметка на малко увеличение на потенциалната енергия и на достатъчно голямо намаление на кинетичната енергия, т.е. радиусът на орбитата на спътника да се увеличи, а скоростта на движението му да се намали достатъчно? Тъй като такъв сценарий не се реализира, би трябвало той да противоречи на някакъв физичен закон. Можете ли да го посочите? (В случая забравете формула (6), която забранява подобно поведение на спътника.)

3. Потърсете данни за зависимостта на плътността на атмосферата от височината и приемете, че силата на съпротивление е правопропорционална на тази плътност. Това означава, че с всяка следваща обиколка спътникът ще изпитва все по-голямо съпротивление. В същото време обаче и гравитационната сила расте, така че и числителят, и знаменателят в дясната страна на равенство (10) с течение на времето се променят. Преценете в каква посока е промяната: към нарушаване на условията, при които траекторията може да се смята окръжност, или обратно?

4. Използвайте формула (15), за да проверите при какво условие орбитата на спътника във всеки момент може да се разглежда като част от окръжност. Съвпада ли то с изведеното по-рано условие (10)?