Пример за нестандартно решение на физична задача[1]

Христо Попов (sotir_h_popov@abv.bg)

В училище на решаването на физични задачи се гледа преди всичко като на средство за по-дълбоко осмисляне и затвърдяване на знанията, както и за формиране на умения за прилагането им в практически ситуации. По-долу, решавайки известна задача нестандартно, ще илюстрираме един от пътищата, по който научната мисъл достига нови знания. За по-голяма яснота подчертаваме ясно границите между отделните етапи, характерни за този път.

Първи етап – откриване и формулировка на проблема

Разглеждаме три реални ситуации:

– Пред строителен работник лежи купчина тухли, които той, мятайки ги, една по една, трябва да прехвърли върху площадка, разположена на няколко метра над земята. При кой избор на траектория тухлите ще падат върху площадката с най-малка скорост?

– Баскетболист тренира, хвърляйки многократно от едно и също място топката към коша. При кой избор на траекторията играчът ще се измори най-малко?

– Оръдие обстрелва мишена, намираща се в произволна точка от пространството над хоризонталната равнина, в която е оръдието. Коя траектория на снаряда изисква минимално количество взривно вещество[2] в гилзата на снаряда?

Кой е общият проблем, който свързва трите ситуации? Очевидно в трите случая се разглежда движение на тяло, хвърлено под ъгъл спрямо хоризонта. Практическият проблем във всеки от тях се свежда до пестене на енергия. (В първия случай скоростта с която тухлата достига площадката е минимална, когато началната скорост, т.е. – кинетичната енергия пре хвърлянето е минимална, а в третия – защото при изстрел използваме енергията, освободена от взривното вещество).

Да преведем проблема на езика на физиката. Известно е, че хвърлено под ъгъл спрямо хоризонта тяло може да достигне определена, предварително избрана точка по множество различни траектории, стига посоката и големината на началната скорост на тялото да бъдат подходящо подбрани. А, тъй като началната скорост определя кинетичната енергия, която трябва да придадем на тялото, проблемът за спестяване на енергия фактически са свежда до минимизиране на началната скорост. С други думи, физичният проблем е: измежду всички възможни траектории, минаващи през набелязаната точка, да открием посоката на големината на началната скорост за онази траектория, за която въпросната големина е минимална. За конкретност, по-нататък ще разглеждаме само „милитаристичния” вариант на ситуацията, като резултатите, очевидно, ще бъдат общовалидни.

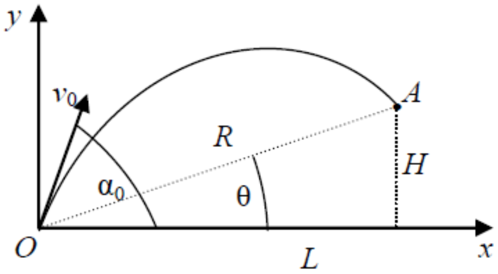
И така, задачата е:

Оръдие обстрелва мишена, намираща се от него на разстояние R, като посоката към нея сключва ъгъл θ *с хоризонта. Под какъв ъгъл* α_0 *спрямо хоризонта трябва да насочим оръдието, така че необходимата начална скорост на снаряда* v_0 *да бъде минимална?*

На фиг. 1 положението на оръдието определя началото O на координатната система, а декартовите координати на мишената (т. A) са означени съответно с L и H.

[1] Всъщност това е вариант на доклад, представен на Националната конференция по въпросите на обучението по физика, 2023.

[2] Количеството на взривното вещество в гилзата определя началната скорост на снаряда.



Фиг. 1

Втори етап – събиране на необходимата информация за решаване на проблема

От изученото в 11. клас е известно, че уравнението на траекторията на тяло, хвърлено с начална скорост v под ъгъл α спрямо хоризонта, е:

(1) $$y = x\tan\alpha - \frac{g}{2v^2}\cdot\frac{x^2}{\cos^2\alpha},$$,

където g е земното ускорение, а x и y – декартовите координати на произволна точка от траекторията. Като използваме въведените с фиг. 1 означения и факта, че т.A лежи върху траекторията, от (1) получаваме връзка между дадените, фиксирани величини L и H, които определят положението на мишената, и неизвестните параметри на траекторията v_0 и α_0:

(2) $$H = L\tan\alpha - \frac{g}{2v_0^2}\cdot\frac{L^2}{\cos^2\alpha_0}.$$

По принцип тази връзка между (α_0,v_0) и (L,H) заедно с изискването за минимум на v_0 са достатъчни за намиране на търсените α_0 и v_0. Стандартното решение изисква от (2) да определим v, след което да търсим минимума спрямо α на получената функция. Задачата обаче допуска и нестандартни решения (вж. [1]), за които е необходима допълнителна информация. Като такава ще използваме два познати от изученото в 11. клас факта:

– Когато оръдието и мишената лежат в една хоризонталната равнина (при H = 0, т.е. – θ = 0), максималното разстояние, на което се отдалечава снарядът, е:

(3) $$l_{\max} = \frac{v_0^2}{g},$$

при което оръдието трябва да сключва с хоризонта ъгъл 45° (т.е. α_0 = 45°).

– Когато мишената е точно над оръдието (при L = 0, т.е. θ = 90°), максималната височина, на която се издига снарядът, е:

(4) $$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g},$$

при което оръдието трябва да бъде насочено също точно нагоре (т.е. и α_0 = 90°).

Ще покажем, че информацията, съдържаща се в равенства (2), (3) и (4), е достатъчна за решаване на задачата.

Трети етап – преработка на информацията в подходящ вид

Тъй като в задачата се търси начална скорост, преди всичко решаваме (3) и (4) спрямо v_0:

(5) $$v_0 = \sqrt{g l_{\max}} \quad \text{и} \quad v_0 = \sqrt{2g h_{\max}}.$$

Като отчетем, че по своя смисъл и $l_{\max}$, и $h_{\max}$ представляват тъкмо максималните разстояния R, на които снарядът се отдалечава в тези два частни случая, т.е. като запишем равенствата (5) във вида:

(6) $$v_0 = \sqrt{gR} \quad \text{и} \quad v_0 = \sqrt{2gR},$$

вече можем да „ги прочетем” по нов начин, т.е. да им дадем ново тълкуване. Наистина, от (6) следва, че:

Минималната начална скорост, необходима на снаряд, за да попадне в мишена на разстояние R от оръдието, е съответно:

(7) когато мишената е на хоризонта: θ = 0° → $v_0 = \sqrt{gR}$, като при това α_0 = 45°;

(8) когато мишената е над оръдието: $\theta = 90° \rightarrow \quad v_0 = \sqrt{2gR}$, като при това $\alpha_0 = 90°$.

Така се оказва, че равенствата (7) и (8) всъщност съдържат отговора на задачата в **частните** случаи $\theta = 0°$ и $\theta = 90°$.

Тъй като в условието на задачата са зададени не декартовите координати L и H на мишената, а полярните ѝ кордиати, удобно е чрез равенствата:

(9) $L = R\cos\theta \qquad H = R\sin\theta$,

да преминем към променливи R и θ и, след като отчетем, че $\tan\theta = \frac{H}{R}$ (фиг. 1), да запишем (2) във вида:

$$\tan\alpha - \tan\theta = \frac{gR}{2v^2}.\frac{\cos\theta}{\cos^2\alpha}.$$

С помощтта на формулата за разликата от тангенсите на два ъгла, решена спрямо v^2 в новите променливи, връзката (2) окончателно приема вида:

(10) $$v^2 = \frac{gR}{2}.\frac{\cos^2\theta}{\cos\alpha\sin(\alpha-\theta)}.$$

Четвърти етап – формулиране на хипотеза

Фактът, че знаем отговора на задачата в два частни случая, навежда на мисълта да търсим решение на проблема при произволно положение на мишената ($0 \leq \theta \leq 90°$) чрез формулиране на подходяща хипотеза, т.е. да извършим преход от частното към общото. Тъй като търсим α_0 и v_0 като функции на R и θ, за да приложим такъв подход, трябва да намерим общото в (7) и (8) както по отношение на R, така и по отношение на θ.

Общото в зависимостта на v_0 от разстоянието R в двата случая е очевидно – $v_0 \sim \sqrt{R}$, поради което е допустимо, че тази зависимост се запазва и при произволно положение на мишената (т.е. – при всяко θ).

Установяването на зависимостта на посоката на изстрела (т.е. на α_0) от R и θ е по-сложно. Анализът на размерностите на участващите величини показва, че търсеният ъгъл α_0 не зависи от разстоянието R. Наистина, α_0 по принцип може да зависи само от зададените θ, R и, евентуално, от земното ускорение g, което участва в (10) . Ъглите α_0 и θ са безразмерни, а от R и g въобще не може да се образува безразмерна комбинация. Следователно α_0 не може да зависи нито от R, нито от g, т.е. $\alpha_0 = f(\theta)$, където f е подлежаща на определяне функция само на θ.

По отношение на зависимостта на α_0 от θ намирането на общото между двата частни случая става по-лесно, ако разсъждаваме не за самите ъгли, а за направленията на техните рамена. В разглежданата ситуация участват четири направления:

– хоризонталното направление, което е фиксирано независимо от нас и спрямо което отчитаме всички ъгли;
– вертикалното направление – също фиксирано и единственото, което има някакъв физически смисъл, защото по него действа силата на тежестта, определяща движението на снаряда;
– направлението на отсечката, свързваща оръдието и мишената – също фиксирано, поради което разглеждаме характеризиращия го ъгъл θ като независима променлива;
– направлението на началната скорост, характеризиращо се с неизвестния ъгъл α_0.

Отчитането на ъглите спрямо оста Ox дава незаслужено предимство на хоризонталното направление, което от гледна точка на физиката не се отличава от останалите направления. По-естествено би било в разглежданията да участват ъгли, сключени с оста Oy, тъй като последната лежи върху физически важното вертикално направление[3]. С други думи, ако досега в някоя връзка е участвал определен ъгъл γ, в новата формулировка трябва да участва ъгълът $\frac{\pi}{2} - \gamma$.

[3] Вярно е, че крайният резултат от решението на задачата не трябва да зависи от избора на направлението, спрямо което отчитаме ъглите. Това обаче не изключва възможността при един избор решението да е по-трудно, отколкото при друг.

Нека от такива съображения изразим по нов начин смисъла на (7). При **досегашния** начин на отчитане на ъглите (от оста *Ox*) той гласи:

Когато посоката към мишената сключва с хоризонта ъгъл нула (т.е. $\theta = 0$*),изстрелът трябва да се произведе в посока, сключваща ъгъл 45° с хоризонта (*$\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$ *).*

Като отчетем (тук е моментът на озарението!), че тъй като в този случай $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$, а посоката към мишената сключва с вертикалата ъгъл $\frac{\pi}{2}$, на същото твърдение може да предадем вида:

Когато посоката към мишената сключва с вертикалата ъгъл $\frac{\pi}{2}$ (т.е. при $\frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2}$), *изстрелът трябва да се произведе в посока, сключваща с вертикалата ъгъл* $\frac{\pi}{4}$ (т.е. $\frac{\pi}{2} - \alpha_0 = \frac{\pi}{4}$) .

Това означава, че всъщност изстрелът трябва да се произведе в посока на ъглополовящата на ъгъла между посоката към мишената и вертикалата.

Алгебричният израз на това твърдение е:

(11) $\frac{\pi}{2} - \alpha_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$, откъдето следва, че търсената връзка на α_0 с θ е:

(12) $\alpha_0 = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}$.

И тук настъпва следващият съществен момент в разсъжденията: веднага се проверява, че когато мишената е точно над оръдието (случаят, описван от (8)), стойностите $\theta = \frac{\pi}{2}$ и $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ също удовлетворяват връзката (12).

И така, общото в двата частни случая, в които решението на задачата е известно, е намерено. На езика на геометрията то се съдържа в твърдението, че и в тези случаи трябва да се стреля по посока на ъглополовящата на ъгъла между посоката към мишената и посоката на вертикалата. Този факт навежда мисълта към предположението, че може би той не е случаен[4], и дава основание да направим следната работна хипотеза:

За да достигне произволно разположена мишена при минимална начална скорост, един снаряд трябва да бъде изстрелян по посока на ъглополовящата на ъгъла между вертикалата и посоката към мишената.

Пети етап – прилагане на хипотезата

Чрез връзката (12) направената хипотеза дава отговор само за зависимостта на α_0 от θ. За да намерим и зависимостта на v_0 от θ и R, използваме равенство (10), което е изпълнено за всяка траектория, минаваща през мишената. Ако в нея заместим α_0 с израза от (12), след кратка преработка получаваме и търсената зависимост:

(13) $v_0 = \sqrt{gR(1 + \sin\theta)}$.

Очевидно е, че формула (13) представлява обобщение на формулите за v_0 в (7) и (8).

И така, **ако хипотезата е вярна**, решение на задачата се представя с формулите (12) и (13).

Шести етап – проверка на хипотезата

Ще покажем, че за **всяко** $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ и за **всеки** начален ъгъл $\alpha \neq \alpha_0$ необходимата за поразяване на мишената скорост v е по-голяма от пресметнатата по формула (13).

За целта с помощта на формулите (12) и (13) образуваме отношението $\left(\frac{v}{v_0}\right)^2$ и го преобразуваме във вида:

---

[4] Разбира се, съвпадението би могло да бъде резултат и от случайни обстоятелства. Както например от това, че и 2+2 = 2x2 и 0+0 = 0x0, съвсем не следва хипотезата, че за всяко n е изпълнено равенството $n + n = n$ x n. Един *контрапример* (напр. 1+1 ≠ 1x1) е достатъчен за опровергаване на подобна хипотеза. Посочените два частни случая са просто следствие от факта, че уравнението $2x = x^2$ има два корена – 0 и 2.

(14) $$\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 = \frac{1}{2}.\frac{\cos^2\theta}{\cos\alpha\sin(\alpha-\theta)(1+\sin\theta)} = \frac{1}{2}.\frac{1-\sin\theta}{\cos\alpha\sin(\alpha-\theta)} = \frac{1-\sin\theta}{\sin(2\alpha-\theta)-\sin\theta}.$$

Тъй като $0 < 2\alpha - \theta \leq \frac{\pi}{2}$, то $0 < \sin(2\alpha - \theta) \leq 1$ и тогава знаменателят на последната дроб наистина не надминава числителя, т.е. $\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \geq 1$.

С това доказваме, че резултатът от нестандартното решение – формули (12) и (13), наистина представляват отговор на задачата, с което правилността на хипотезата е потвърдена.

„Сухият остатък" от решаването на самата задача е удивително простото и лесно запомнящо се правило: **За да достигнем цел с минимален разход на ресурси (взрвно вещество – при артилерийска стрелба, запасена в мускулите енергия – в баскетбола и пр.), трябва да насочим тялото по посока на ъглополовящата на ъгъла, заключен между посоката към целта и вертикалата.**

Евентуално приложение на нестандартното решение на задачата

Според Учебната програма по физика и астрономия [2] една от основните **цели** на профилираната подготовка в 11. клас е „Развитие на теоретично мислене ... у учениците чрез усъвършенстване на представите им за ... *логиката на научното познание*" (к.м.). Нестандартното решение илюстрира добре възлови моменти от използването на хипотези за получаване на ново научно познание. (Установеният факт относно посоката на минималната скорост за достигане на определена цел е несъмнено нов за учениците.) Така това решение показва, че спектърът от постижимите чрез решаване на задачи образователни цели може да се обогати, като в него се включи и посочената в [2] цел.

Нестандартното решение на конкретната задача откроява още по-детайлно основните моменти в процеса на поставяне на една задача и решаването ѝ с помощта на подходяща хипотеза:

– събиране на начална информация – съвместното разглеждане на вече известните резултати (3) и (4);

– осъзнаване, че записани във вида (7) и (8), формули (3) и (4) представляват отговор на един и същ въпрос за два частни случая – на въпроса за минималната скорост;

– формулиране на задачата – поставяне на въпроса за преход от частните случаи към общия случай;

– установяване на общия геометричен смисъл на (7) и (8), изразен с формула (12);

– формулиране на хипотезата („моментът на озарение");

– прилагане на хипотезата – формула (13);

– проверка на хипотезата – формула (14).

От изложението се вижда също, че нестандартното решение на задачата може да стимулира развитието на такива характерни за творческото мислене способности като: откриване на общото сред няколко частни случая, оценка на един факт от различни гледни точки, извършване на преход от частното към общото знание и др.

Погледнато по-общо, от гледна точка на компетентностния подход, можем да очакваме, че използването на нестандартното решение ще допринесе за формирането на математическа компетентност, която включва способност за прилагане на математически начини на мислене, способност да се следват вериги от аргументи и др.

Със сигурност не само в кинематиката, но и в други раздели на училищната физика може да се открият задачи, които допускат нестандартни решения. Също толкова сигурно е обаче, че този подход е неподходящ за работа в клас. (Въпросът бе разгледан по-подробно в [1].) Нестандартният начин за решаване на задачи може да се използва например в индивидуалната работа с ученици, притежаващи необходимите способности и интереси към природните науки и математиката. Задача на учителя е да открие тези ученици, както и да подбере задачи, които допускат решение не само чрез хипотеза, но и по други характерни за научното мислене методи.

Източници:

1. Вж. *Една задача – пет решения*, opus.2022.pdf (uni-sofia.bg)
2. Учебни програми за профилирана подготовка (mon.bg)