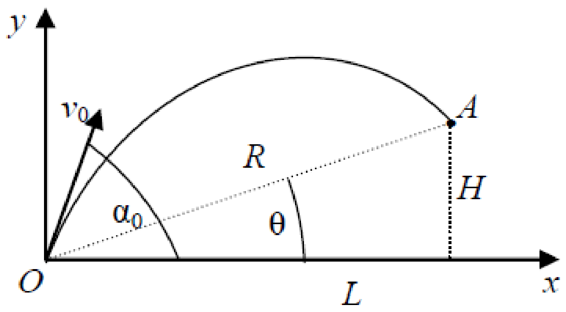
Нестандартно решение на една стандартна задача

В една стандартна кинематична задача се търси под какъв ъгъл α спрямо хоризонта трябва да хвърлим тяло с начална скорост v, така че траекторията да минава през отнапред зададена т. A (фиг. 1). Стандартното решение използва изученото в 11. клас уравнение на траекторията на тялото:

$$y = x\tan\alpha - \frac{g}{2v^2}.\frac{x^2}{\cos^2\alpha}, \qquad (1)$$

което свързва параметрите v и α, определящи траекторията, с декартовите координати x и y на нейните точки.



Фиг. 1.

Тъй като т. A е фиксирана точка от траекторията, ако означим координатите ѝ съответно с L и H, от (1) получаваме връзка между известните L, H и v и неизвестния ъгъл α:

$$H = L\tan\alpha - \frac{g}{2v^2}.\frac{L^2}{\cos^2\alpha}. \qquad (2)$$

Тази връзка е достатъчна за намиране на търсения ъгъл. (Едно от възможните решения е посочено например в [1].)

По-сложен вариант на задачата допуска и началната скорост v да бъде неизвестна. За конкретност по-нататък разглеждаме траекторията на снаряд, изстрелян от оръдие с цел да попадне в мишена, намираща се в т. A. (Примерът е удобен, защото началната скорост на снаряда може да се променя чрез промяна на количеството взривно вещество в гилзата му). Такава задача вече е неопределена: съществуват безкрайно много различни двойки (v и α)), на които съответстват траектории, минаващи през мишената. От общи съображения, за неизвестните са ясни само две ограничения:

– съществува минимална скорост v_0, под която снарядът не може да достигне мишената, независимо от големината на началния ъгъл, т.е. непременно $v \geq v_0$;

– съществува минимален начален ъгъл θ, който е равен на ъгъла между хоризонталната попосока и посоката към т. A (фиг.1), т.е. $\alpha \geq \theta$, независимо колко голяма е началната скорост v. (В противен случай траекторията минава под т. A.)

За да стане задачата определена, към (2) трябва да се добави допълнително условие – например, да се изисква мишената да се достигне с най-малката възможна начална скорост на снаряда. Такава задача вече е определена и в този смисъл – също стандартна. Стандартният алгоритъмът за решението ѝ включва: решаване на (2) спрямо v; диференциране на получения израз спрямо α; приравняване към нула на първата производна и намиране онази стойност α_0, за която началната скорост v_0 е минимална; заместване на намерения израз за α_0 във формулата за v и преработване на получения израз за търсената минимална скорост v_0.

В [1] показахме още, че и тази задача може да се реши със средствата на елементарната математика (т.е. без диференциране), при това – по повече от един начин. По-долу ще представим едно по-нестандартно решение, което използва *метода на хипотезите*.

Преди всичко ще напомним, че използването на хипотези за решаване на проблеми (т.е. за добиване на нови знания) предполага:

а) **Обосновка** на хипотезата, т.е. подбор и систематизиране на вече известни факти (данни), получени или експериментално, или представляващи решения на проблема в частни случаи и др.п.

б) **Формулировка** на хипотезата – тук обикновено роля играе „прозрението” („щастливата догадка”).

в) **Прилагане** на хипотезата – само в случай, че тя не дава пряко решение на проблема.

г) **Проверка** на хипотезата – най-често чрез търсене на експериментални потвърждения на нейни следствия, чрез установяване верността ѝ като следствие от по-общо истинно твърдение и др.п.

Задачата и нестандартното ѝ решение

В каква посока и с каква минимална начална скорост v_0 трябва да изстреляме снаряд, така че траекторията му да мине през мишена, намираща се на разстояние R от оръдието и посоката към която сключва ъгъл θ с хоризонта (т. А на фиг.1)?

Обосновка на хипотезата. Като начални данни използваме знания от 11. клас за движение на тяло, хвърлено под ъгъл спрямо хоризонта:

– максималната далечина на полета в хоризонтална посока на сналяд, изстрелян с начална скорост v_0, се достига при начален ъгъл $\alpha_0 = 45°$ и се описва с формулата:

(3) $$l_{\max} = \frac{v_0^2}{g};$$

– максималната височина, на която се издига снаряд, изстрелян със скорост v_0 вертикално нагоре (т.е. при $\alpha_0 = 90°$) се описва с формулата:

(4) $$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Решени спрямо v_0, равенства (3) и (4) приемат вида:

(5) $$v_0 = \sqrt{g l_{\max}} \quad \text{и} \quad v_0 = \sqrt{2g h_{\max}}\,.$$

Като отчетем, че по своя смисъл $l_{\max}$ и $h_{\max}$ представляват точно максималните разстояния R, на които в двата частни случая се отдалечава снарядът, на (5) вече може да придадем нов смисъл:

Минималната начална скорост, която трябва да придадем на снаряд, за да попадне в мишена на разстояние R от оръдието е:

(6) когато $\theta = 0° \;\rightarrow\; v_0 = \sqrt{gR}$, като при това $\alpha_0 = 45°$;

(7) когато $\theta = 90° \;\rightarrow v_0 = \sqrt{2gR}$, като при това $\alpha_0 = 90°$.

Следователно равенства (6) и (7) дават отговор на задачата в частните случаи $\theta = 0°$ и $\theta = 90°$, поради което ще ги използваме за обосновка на хипотезата.

Формулировка на хипотезата**.** Преди всичко ще потърсим общото между формулите (6) и (7) по отношение на зависимостта на α_0 от θ. Първото, което прави впечатление е, че и в двата случая стойностите на α_0 не зависи от разстоянието R. По-съществена прилика се разкрива обаче, ако вникнем в геометричния смисъл на двете равенства. (В случая езикът на геометрията е по-подходящ, тъй като позволява да изразим зависимостите в словесна форма.)

За целта обръщаме внимание на факта, че в частния случай $\theta = 0°$ ъгълът $\alpha_0 = 45°$ е **точно половината** на 90° – т.е. половината на ъгъла между вертикалата (направлението на земното ускорение g) и посоката към мишената. (Това е моментът на „прозрението”, т.е. на „щастливата догатка”.) С други думи в този частен случай ъгълът $(\frac{\pi}{2} - \alpha_0)$ между вертикалата и посоката на началната скорост е равен на ъгъла $(\alpha_0 - \theta)$ между посоките на началната скорост и към мишената (вж. фиг. 1), или:

$$\frac{\pi}{2} - \alpha_0 = \alpha_0 - \theta.$$

Следователно, в частния случай, когато мишената е в хоризонталната равнина, връзката между посоката на началната скорост и посоката към мишената е:

$$\alpha_0 = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\,. \tag{8}$$

Във втория частен случай, когато мишената е точно над оръдието, както $\theta = 90°$, така и $\alpha_0 = 90°$. Веднага се вижда, че, заместени в (8), тези две стойности го превръщат в тождество, т.е. и в този случай можем да твърдим, че посоката на началната скорост съвпада с ъглополовящата на ъгъла между посоките нагоре и към целта. (Не е необходимо голямо въображение, за да осъзнаем, че наистина посоката на ъглополовящата на ъгъл 0° съвпада с общата посока на раменете на ъгъла.)

По такъв начин общото между формули (6) и (7) по отношение на зависимостта на α от θ се съдържа в заключението, че *както при $\theta = 0°$, така и при $\theta = 90°$, началната скорост на снаряда е минимална, ако посоката ѝ разполвява ъгъла между посоката към мишената и вертикалата.*

Разбира се, това заключение би могло да бъде резултат от случайни обстоятелства. (Както, например, от това, че и 2+2 = 2x2, и 0+0 = 0x0 съвсем не следва, че за всяко n е изпълнено равенството $n + n = n \times n$. Един контрапример – неравенството $3+3 \neq 3\times3$ веднага опровергава подобна „хипотеза”. Посочените две равенства са следствие от факта, че уравнението $2x = x^2$ има само два корена – 0 и 2.)

Заключенията, че в двата частни случая:

– α_0 зависи само[1] от θ;

– геометричният смисъл на (6) и (7) е един и същ,

представляват основание за формулиране на следната хипотеза:

За да достигне дадена мишена с минимална начална скорост, един снаряд трябва да бъде изстрелян по посока на ъглополовящата на ъгъла, заключен между посоките нагоре и към мишената.

Прилагане на хипотезата. В нашия случай хипотезата дава отговор само на част от проблема – зависимостта (8) на α_0 от θ. Остава да покажем, че тази хипотеза е достатъчна за определяне и на зависимостта на v_0 от θ и R. За целта използваме връзката (2) между дадените и неизвестните величини. Тъй като условието на задачата задава положението на мишената не чрез декартовите координати L и H, а чрез R и θ, с помощта на равенствата (вж. фиг. 1):

[1] В [1] показахме, че всъщност независимостта на α_0 от R следва от елементарен анализ на размерностите.

(9) $L = R\cos\theta$ и $H = R\sin\theta$

преминаваме в (2) към новите променливи и след известна преработка получаваме връзката:

$$\tan\alpha - \tan\theta = \frac{gR}{2v^2}.\frac{\cos\theta}{\cos^2\alpha},$$

Като решим това равенство спрямо v^2 и използваме формулата за разлика на тангенсите от два ъгъла ($\tan\alpha - \tan\theta = \frac{\sin(\alpha-\theta)}{\cos\alpha\cos\theta}$), получаваме:

(10) $$v^2 = \frac{gR}{2}.\frac{\cos^2\theta}{\cos\alpha\sin(\alpha-\theta)}.$$

Този израз за v^2 е валиден за всяка траектория, която минава през мишената. В частния случай, в който според направената хипотеза началният ъгъл на стрелбата се определя от равенство (8), от (10) получаваме:

(11) $$v_0 = \sqrt{gR(1+\sin\theta)}.$$

Следователно, **ако хипотезата** е вярна, решение на задачата са формулите (8) и (11).

Проверка на хипотезата. Веднага се вижда, че в частните случаи $\theta = 0$ и $\theta = \frac{\pi}{2}$ формула (11) се редуцира до познатите резултати (6) и (7). Това обаче още не доказва верността на хипотезата – необходимо е да покажем, че за **всяка** стойност на θ от интервала $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ и за **всеки** начален ъгъл $\alpha \ne \alpha_0$, необходимата за поразяване на мишената скорост v е по-голяма от пресметнатата по формула (11).

За целта, с помощта на формулите (10) и (11) образуваме отношението:

(12) $$\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 = \frac{1}{2}.\frac{\cos^2\theta}{\cos\alpha\sin(\alpha-\theta)(1+\sin\theta)} = \frac{1}{2}.\frac{1-\sin\theta}{\cos\alpha\sin(\alpha-\theta)} = \frac{1-\sin\theta}{\sin(2\alpha-\theta)-\sin\theta}.$$

Тъй като $0 < 2\alpha - \theta \le \frac{\pi}{2}$, то $0 < \sin(2\alpha - \theta) \le 1$ и тогава знаменателят на последната дроб наистина не надминава числителя, т.е. $\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \ge 1$.

И така, резултатът от нестандартното решение – формули (8) и (11), наистина представляват отговор на задачата.

Защо отделяме такова внимание на метода на хипотезите

В училище на решаването на физични задачи обикновено се гледа като на средство за затвърдяване на знанията и за изграждане на умения за прилагането им. Според Учебната програма по физика и астрономия [2] обаче, основна цел на профилираната подготовка в 11. клас е „Развитие на теоретично мислене ... у учениците чрез усъвършенстване на представите им за ... *логиката на научното познание*" (к.м.). Съществено място във въпросната логика заемат хипотезите. С предложеното нестандартно решение искаме да покажем, че спектърът от постижимите чрез решаване на задачи образователни цели може да се обогати, като в него се включи и горепосочената цел. Решаването на задача с помощта на подходяща хипотеза е добра илюстрация на един от пътищата за постигане на ново знание. Предложеното решение на конкретната задача спомага също така и за култивиране на способност за търсене и откриване на общото в частните случаи, която способност също е елемент на твърческото мислене.

Ключов момент в нестандарното решение бе преходът от формули (3) и (4) към формули (5). От математична гледна точка едните и другите са еквивалентни, те просто са решени спрямо различни величини. От физична гледна точка обаче този преход е съществен, той дава възможност за поглед под друг ъгъл към връзката между величините: в единия случай говорим за максимално разтояние, в другия – за минимална скорост. Способността да се виждат фактите под различен от традиционния ъгъл е също елемент на творческото мислене. Погледнато от тази страна, нестандартното решение е един стимул за развиване на тази способност.

Другият ключов момент е осъзнаването, че всъщност връзката (8) е валидна не само за мишена, разположена в хоризонтална посока, но и за такава, намираща се точно над оръдието.

А, като цяло, това нестандартно решение илюстрира как с помощта на удачна хипотеза може да се направи преход „от частното знание към общото знание", т.е. от $\theta = 0°$ и $\theta = 90°$, към $0° \leq \theta \leq 90°$.

От всичко гореизложено се вижда, че за постигане на тези по-конкретни образователви цели не са необходими някакви промени в учебното съдържание или в методиката на обучение – достатъчно е само подходящо преструктуриране и разставяне на ударенията върху съответните елементи на решението.

Със сигурност не само в кинематиката, но и в другите раздели на училищната физика може да се открият задачи, които допускат нестандартни решения. Също толкова сигурно е, обаче, че такъв подход е неподходящ за работата в клас. (Този въпрос бе разгледан по-подробно в [1].) Нестандартният начин за решаване на задачи може да се ползва примерно в индивидуалната работа с ученици, притежаващи необходимите способности и интереси към природните науки и математиката. Задачата на учителя е да открие тези ученици, както и да подбере задачи, които допускат решение не само чрез хипотеза, но и по други характерни за научното мислене методи.

Теми за размисъл

На основа на разгледаната задача миже да се търсят отговори на редица допълнителни въпроси. Един от по-леките е да се докаже, че скоростта v_{m}, с която снарядът достига мишената, при условие, че е изстрелян с възможната минимална начална скорост, се описва с формулата:

(13) $$v_{\mathrm{m}} = \sqrt{gR(1 - \sin\theta)}$$

Друг, по-сериозен проблем, се очертава, ако припомним първия ключов момент в нестандартното решение: използвахме формулите (3) и (4) за максималното разстояние, на което снарядът се отдалечава при две фиксирани стойности на ъгъла между хоризонта и посоката на началната скорост. След като ги решихме спрямо големината на началната скорост, получихме формули (5) за минималната скорост, необходима за достигане на цел, разположена по същия начин. Тъкмо тези формули послужиха като основание за хипотезата, която позволи да намерим израза (11) за минималната скорост, необходима за поразяване на мишена с произволно разположеине.

Сега може да се постави обратният въпрос: *ако решим* (11*) спрямо R, ще получим ли формула за максималното разстояние, на което се отдалечава от оръдието снаряд, изстрелян с начална скорост* v_0 *в посока, сключваща ъгъл* α_0 *с хоризонта*?

Решението на (11) спрямо R, след заместване на θ от (8) е:

(14) $$R = \frac{v^2}{g} \cdot \frac{1}{1 - \cos 2\alpha_0}.$$

Веднага се проверява, че за $\alpha_0 = 45°$ и $\alpha_0 = 90°$ тази формула дава правилните резултати (3) и (4). Дали обаче това е така за всяко α_0 от интервала [45°, 90°]? (За интервала $[0 \leq \alpha_0 \leq 45°]$ отговорът на поставения въпрос е интуитивно ясен – той се дава от изучената формула $l_{\max} = \frac{v^2}{g} \sin 2\alpha_0$.)

Отговорът може да се търси или във форма на определено разсъждение, или чрез пресмятане от типа на (12).

В резултат от направените разглеждания може да съставим обща картина за промяната на разстоянието от оръдието до най-далечната точка от траекторията при една и съща начална скорост v, когато началният ъгъл α се променя от 0° до 90°.

В интервала [$0° \leq \alpha \leq 45°$.] най-отдалечената от оръдието точка се намира в хоризонталната равнина, в която е оръдието и разстоянието до нея се описва с цитираната вече формула: $R = \frac{v^2}{g} \sin 2\alpha$. Тя показва, че в този интервал за α максималното разстояние расте от 0 до $\frac{v^2}{g}$, след което, в интервала [$45° \leq \alpha \leq 90°$], в съответствие с формула (13) постепенно намалява от $\frac{v^2}{g}$ до $\frac{v^2}{2g}$.

Източници:

1. opus.2022.pdf (uni-sofia.bg)
2. Учебни програми за профилирана подготовка (mon.bg)