# Една задача – пет решения

(*Вариации на тема „Оръдие – снаряд – мишена”*)

Христо Попов (за връзка: sotir_h_popov@abv.bg)

**Резюме**: Изказано е твърдение, че в методиката на обучение по физика са недооценени ролята на решаване на физични задачи при формиране на математическа компетентност и на способност за креативно мислене. Един начин за преодоляване на този недостатък е промяна на акцентите в процеса на решаване на задачите. Идеята се илюстрира чрез варианти на решенията на една задача, свързана с траекторията на тяло, хвърлено под ъгъл спрямо хоризонта.

**Ключови думи**: математическа компетентност, креативно мислене, решаване на физични задачи, тяло, хвърлено под ъгъл спрямо хоризонта.

## One problem – five solutions

(Variations on the theme "Cannon - projectile - target")

Ch. Popov (contact: sotir_h_popov@abv.bg)

Summary: It has been argued that the role of solving physical problems in the formation of mathematical competence and the ability to think creatively is undervalued in the methodology of physics education. One way to overcome this shortcoming is to change the emphasis in the task-solving process. The idea is illustrated by variants of solutions to a problem related to the trajectory of a body thrown at an angle to the horizon.

**Keywords**: mathematical competence, solving physical problems, body thrown at an angle to the horizon.

Междупредметната връзка физика – математика винаги е била близо до центъра на вниманието и на специалистите по методика на обучението, и на учителите по физика. Отношението на физиците към нея обаче е преди всичко едностранчиво и преди всичко – „консуматорско”. Обикновано нас ни интересуват конкретни случаи, напрмер: дали когато изучаваме свободно падане, учениците вече умеят да решават квадратни уравнения; когато изучаваме статика – дали могат да събират и разлагат вектори; дали познават критериите за еднаквост на триъгълници и тригонометричните функции – когато изучаваме геометричната оптика и т.н. С други думи за обучението по физика са важни преди всичко съдържателната и времевата съгласуваност на учебните програми по двата предмета. И това наистина е най-съществеността, за да се постигнат целите на обучението по физика.

Не бива да забравяме обаче, че (като всяка връзка) и тази е двупосочна, т.е. – има своята обратна страна. Това означава, че трябва да има отговор и въпросът: с какво и как обучението по физика помага да се  постигнат целите на обучението по математика. Този въпрос все още чака своя изчерпателен отговор и по-долу обръщаме внимание на само една от възможностите в това отношение.

*Кой е адресатът на разработката?*

За незадоволителното състояние на обучението по физика може да се сочат различни причини. Една от тях, без да е най-важната, е неговата несполучлива диференциация. Днес диференциацията се осъществявана чрез няколко вида подготовка: общообразователна, разширена, профилираща и допълнителна. Докато в първите три вида основна е класната форма на обучение, последната, допълнителната, включва[1] „...обучение или  дейности в други форми”. Към тези други форми принадлежи и индивидуалната работа с онези талантливи ученици, които притежват заложби, нагласи и интерес към изучаване на физиката. Естествено, вниманието на специалистите по методика на обучението е насочено предимно към първите три вида подготовка, тъй като те обхващат преобладаващото мнозинство ученици и именно техните резултати формират оценката за средното равнище на подготовка. Обикновено обаче интересите на онези единици талантливи ученици, които се ориентирт към природните науки, остават незадоволени, а възможностите им – неразвити.

Предлаганата разработка е адресирана до онази група активни учители, които имат желание и амбиция, а така също и възможност да отделят време за индивидуална работа с талантливите ученици, т.е. за една от „другите форми” на подготовка. Разработката би могла да се ползва и от методи;ците, които се интересуват от методиката на обучение за решаване на физични задачи.

*Кой проблем е предмет на разглеждане?*

Решаването на количествени задачи е съществен елемент от обучението по физика. Негови традиционни цели са: затвърдяване на знанията, изграждане на умения за прилагането им в свързани с практиката проблеми и др.п. Обикновено използваният в клас алгоритъм за решаване на една задача съдържа три основни етапа: идентифициране на дадените и търсените величини, запис на достатъчен брой връзки между едните и другите и решаване на система от уравнения спрямо неизвестните. (Други моменти, като преобразуване на единици, заместване на стойностите на известните в получените изрази за неизвестните, пресмятания и др. в случая не се разглеждат).

От гледна точка на компетентностния подход в средното образование, а също така предвид необходимостта от индивидуална работа с гореспоменатия тип ученици, тези цели изглеждат твърде тесни. В подкрепа на това твърдение отбелязваме, че неслучайно в препоръките[2] на Съвета на Европа ключовите компетентности по математика и по природни науки фигурират **в една и съща** от изброените там осем групи. Очевидна причина за това обединение е използването  на общ за тези науки метод – научния метод за получаване на нови знания. Този факт, разбира се, се отразява и върху изучаването на съответните учебни предмети. Различните компетентности се развиват при обучението в различни предмети и обединяването в една група на математическата компетентност и компетентностите по природните науки предполага, че за развитие на математическа компетентност например обучението по физика може да допринесе значително повече, отколкото, да речем, обучението по география, което е в друга група. Този факт обаче не намира отражение в Таблица[3], указваща коя компетентност чрез

---

[1] Закон за предучилищното и училищното образование, ДВ бр. 75 от 2015 г.

[2] C_2018189BG.01000101.xml (europa.eu)

[3] https://www.bing.com/ck/a?!&&p=fc6ce7744bbec301f02c974a313ee1e86d715ff597ad85337cbe9fbf3daaea27JmltdHM9MTY1ODE1Mzg1NCZpZ3VpZD0yNjE0ODA4OC1mOGI0LTRhODQtOTAzMy1kMTU4YjRhYmFiMzAmaW5zaWQ9NTEyMA&ptn=3&fclid=5e254ac1-06a4-11ed-8c1a-2d9e8a3c5a4c&u=a1aHR0cHM6Ly93ZWIubW9uLmJnL3VwbG9hZC8yMTc5OC9UYWJsaWNhLWtleS1jb21wZXRlbmNlcy5wZGY&ntb=1

обучението по кой предмет се развива. Така в реда на таблицата, в който се указва какви компетентности трябва да се развиват чрез изучаване на физика и астрономия са посочени компетентностите от останалите осем групи, които може да се развиват чрез обучението по физика, но в „нашата колонка” *Математическа компетентност и основни компетентности в областта на природните науки* ... се изброяват само конкретни „наши, физични” компетентности[4]. С други думи ***не се обръща внимание на факта, че обучението по физика допринася за развитие и на други компетентности от същата група, по-специално – на математическа компетентност.***

Така например математическата компетентност, наред с другото, „включва *до различна степен* (к.м.) способност и желание за прилагане на математически начини на мислене...”, а така също и „умения да се прилагат основните математически принципи при решаване на задачи от всекидневието, както и да се следват и оценяват вериги от аргументи.”. Курсивираните думи в този цитат подсказват, че това изискване не е еднакво за всички ученици. За тези обаче, чието обучение имаме предвид тук, степента на постигането му трябва да бъде по-висока от тази за останалите.

Необходимостта от развиване на способността на учениците да мислят намира отражение и в редица нормативни документи. Така например една от специфичните цели за профилираната подготовка по физика е формулирана[5] като необходимост от „Развитие на научно мислене чрез използване на модели и различни математически методи и средства.”

Всъщност проблем може и да не съществува – най-вероятно няма изследване по въпроса дали и доколко сегашното обучение по физика допринася за формиране на математическа компетентност. Още повече, че в случая ни интересува твърде малка част от обучаемите. По същество става дума за „бяло поле” в методиката на обучение по физика, т.е. в нея не се обръща достатъчно внимание на ролята, която това обучение може да играе за постигане на целта да се развие научното мислене и по-специално – на „*математическите начини на мислене”*. За да се постигне тази цел, най-добрият (ако не и единствен) начин е практиката – с елементите, с прийомите, с всичко, което характеризира научното мислене учениците могат да се запознават в процеса на работа, най-вече – при решаване на физични задачи.

Както ще покажем по-долу, За запълване на тази празнота в методиката не са необходими промени в учебните програми или кардинални изменения в методиката на решаването на задачи. За развиване на елементи на математическа компетентност може да допринесе и една проста промяна на акцентите в процеса на решаване на подходящи физични задачи, т.е. само едно разясняване и подчертаване на смисъла и значението на стъпките, които правим в процеса на решаването им.

Друга недооценена област на методиката на обучение по физика ***е възможността чрез решаването на задачи да се развиват умения за креативно***

[4] Може би специалистите по методика на обучението следва да помислят за разработване на една отделна таблица, подобна на цитираната, от която да се вижда как обучението по математика ще допринесе за изграждане на компетентностите, предвидени в обучението по физика, по химия и по биология; как обучението по физика ще доведе до изграждане на компетентностите по математика, по химия и биология и т.н.

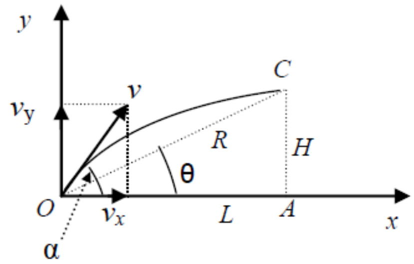
[5] Наредба 7 от 2016 за профилираната подготовка по физика.

***мислене,*** ако като елементи на това мислене се разбират предлагането на необичайни решения на стари проблеми, както и откриването и решаването на нов проблем въз основа на стари знания и др.

За илюстрация на начини, които биха довели до напредък в тези две насоки, използваме пример от разнообразните задачи, свързани с движение на материална точка в статично хомогенно силово поле. Примерът е свързан с Учебната програма по физика и астрономия (профилирана подготовка), в която като очакван резултат от обучението по тема Кинематика изрично е заложено изискването за развиване на компетентност „да се прилагат „...закономерностите при движение на тяло, хвърлено под ъгъл спрямо хоризонта."

*Кое е общото за задачите от този вид?*

Общото за всички задачи от разглеждания вид е, че движението на хвърленото тяло, включително неговата траектория, се определя напълно от две величини: от посоката (ъгъл α) и от големината $v$[6] на началната му скорост. Общ е и фактът, че движението е двумерно – във вертикалната равнина, определена от точката, от която е хвърлено тялото и от посоката на началната му скорост. Затова в декартови координати координатното начало се избира в началната т. *O*, абсцисата *Ox* – в хоризонтална, а ординатата Oy – във вертикална посока (фиг. 1).




Фиг. 1

Общ е и видът на траекторията – отворена надолу парабола, състояща се от възходяща и низходяща част, разположени симетрично от двете страни на вертикалата през върха ѝ, като уравнението на траекторията е:

(1) $$y = x\tan\alpha - \frac{g}{2v^2}\cdot\frac{x^2}{\cos^2\alpha},$$

където $g$ е ускорението на свободно падане.

В много от задачите се изисква траекторията да минава през предварително избрана точка. В зависимост от това дали точката е неподвижна, или се движи те биват два вида: първият е **модел** на реална стрелба с оръдие по неподвижна цел (мишена), а вторият – на стрелба по подвижна цел (основната задача в зенитната артилерия). Решението на задача от втория вид е по принцип по-трудно, тъй като изисква използване на два закона за движение – на снаряда и на мишената. По-долу разглеждаме задачи само от първия вид, за чието решаване е достатъчно да се познава уравнението на траекто-

[6] Обикновено началните скорост и ъгъл означаваме с $v_0$ и $\alpha_0$, а променящите се по време на полета техни значения – с $v$ и α. Тъй като в по-нататъшните разглеждания времето не участва, тук с $v$ и α означаваме **началните** данни, определящи всяка от траекториите, минаващи през избраната точка, а с $v_0$ и $\alpha_0$ – началните данни само за единствената траектория, която, удовлетворява и някакво допълнително условие.

рията и в тях времето като независима променлива не участва. Във всички случаи обаче и за снаряда, и за мишената се използва моделът на материална точка.

На фиг. 1 мишената се намира в т. $C$, а декартовите ѝ координати са означени съответно с $L$ и $H$. Изискването траекторията на снаряда да минава през мишената налага между четирите величини $v$, α, $L$ и $H$ връзката:

(2) $$H = L\tan\alpha - \frac{g}{2v^2}.\frac{L^2}{\cos^2\alpha}.$$

Равенство (2) позволява да класифицираме задачите за стрелба според броя на неизвестните по неподвижна цел на три типа:

– Задачи, в чието условие са зададени три от въпросните четири величини – в този случай равенство (2) е достатъчно за намиране на четвъртата. Разнообразието от подобни задачи не е голямо – тъй като участващите в (2) величини са четири, а неизвестната – само една, принципно различни са само четири вида задачи от този тип.

Най-близък до практиката е случаят, в който са известни местоположението на целта ($L$ и $H$) и началната скорост $v$ на снаряда. При него с помощта на тъждеството:

(3) $$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$$

равенство (2) се превръща в квадратно уравнение за tanα, чиито решения определят началните ъгли α, под които трябва да бъде изстрелян снарядът.

– Задачи, в чието условие са зададени само две от разглежданите четири величини. В този случай разнообразието на задачи е малко по-голямо, тъй като възможните двойки неизвестни са шест (α, $v$), (α, $L$), (α, $H$), ($v$, $L$), ($v$, $H$) и ($L$, $H$).
Тъй като от едно уравнение не може да се определят две неизвестни, за да бъде задача от този тип определена, необходимо е условието ѝ да съдържа допълнителна информация. Тази информация осигурява недостигащата функционална връзка между дадените и търсените величини. И точно различните възможности за подбор на такава информация обуславят разнообразието на задачите от този втори тип. В качество на допълнителна информация може да се наложи например изискването целта да бъде поразена с минималната възможна начална скорост или началните скорост и ъгъл да бъдат така подбрани, че целта да се окаже във върха на траекторията и др.

– Задачите от третия тип съдържат три неизвестни величини и не са популярни, тъй като, за да станат определени, условието им трябва да съдържа информация, от която произтичат две допълнителни уравнения. Това изискване отдалечава твърде много задачата от действително интересните случаи.

*Необходими знания за разкриване на проблема и за решаването му*

От изученото в клас е известно, че:

1. Връзката (2) между известните и неизвестните величини е записана в декартови координати. В редица случаи е по-удобно положението на мишената да се фиксира чрез разстоянието до нея $R$ и чрез ъгъла θ, сключен между посоката към нея и хоризонталната равнина (вж. фиг. 1). В тези случаи е удобно с помощта на равенствата:

(4) $$H = R\sin\theta \quad \text{и} \quad L = R\cos\theta$$

да приведем (2) във вида:

(5) $$\tan\alpha - \tan\theta = \frac{gR}{2v^2}.\frac{\cos\theta}{\cos^2\alpha}.$$

2. Максималната височина, на която се издига тяло, хвърлено под ъгъл α с начална скорост $v$ ,е:

$$h = \frac{v^2}{2g}\sin^2 \alpha.$$

Оттук следва, че **максималната** височина, която изобщо може да се издигне тяло, хвърлено със скорост $v$ , е:

$$h_{max} = \frac{v^2}{2g}$$

и се достига при условие, че тялото е хвърлено вертикално нагоре (sin90° = 1).

Записана във вида:

(6) $$v = \sqrt{2gh_{max}},$$

същата връзка между $v$, $g$ $h_{\max}$ вече допуска и следното ново тълкуване: (6) определя **минималната** скорост, с която трябва да хвърлим тяло вертикално нагоре, за да достигне то предварително зададена височина $h_{\max}$.

3. Разстоянието, на което се отдалечава в хоризонтална посока тяло, хвърлено под ъгъл α с начална скорост $v$, е:

$$l = \frac{v^2}{g}\sin 2\alpha.$$

Оттук следва, че изобщо **максималното** разстояние в хоризонтална посока, на което може да се отдалечи тяло, хвърлено със скорост $v$, е:

$$l_{\max} = \frac{v^2}{g}$$

и се достига, когато тялото е хвърлено под ъгъл α = 45° (sin(2.45°) = 1).

Записана във вида:

(7) $$v = \sqrt{gl_{\max}},$$

и връзката между $v$, $g$ и $l_{\max}$ също допуска ново тълкуване: (7) определя големината на **минималната** скорост, с която трябва да хвърлим тяло, за да се отдалечи то на разстояние $l_{\max}$ в хоризонтална посока, като посоката на скоростта трябва да сключва ъгъл 45°с хоризонталната равнина.

Да погледнем сега резултатите (6) и (7) от друг ъгъл. Съгласно с тях, ако искаме едно тяло да достигне точка, отстояща на разстояние $R$ по вертикалата (т.е. при θ = 90°), трябва да му придадем скорост, не по малка от $\sqrt{2gR}$, насочена също по вертикалата (т.е. при α = 90°). Ако тялото е на същото разстояние, но в хоризонтална посока (т.е. при θ = 0°), тази скорост трябва да бъде поне $\sqrt{gR}$, а началният ъгъл между скороста и хоризонталната равнина – α = 45°.

При този прочит на резултатите (6) и (7) по естествен път възниква проблемът: с каква минимална скорост и под какъв ъгъл спрямо хоризонта трябва да хвърлим тяло, така че траекторията му да мине през фиксирана **произволна** точка на пространството?

Това е и първият пример как на основата на стари знания (познаването на $\sqrt{2gR}$, 90°, и съответно $\sqrt{gR}$, 45°) може да се формулира нов проблем, чието решение ще търсим. За целта в случая използвахме нов запис ((6) и (7)) на известни зависимости, от който последва и нов смисъл на зависимостите, а оттук – и новият проблем.

*Задачата, чиито решения разглеждаме*

С оглед на поставените цели е удобно да разгледаме решенията на най-близката до реалните ситуации конкретна задача от втория тип: задачата, в която се разглежда стрелба с оръдие, като е известно положението на мишената (целта), а неизвестни са началните условия за скоростта на снаряда:

**Задача:** *Оръдие стреля по мишена, намираща се на разстояние R от него, а отсечката, която ги свързва, сключва ъгъл* $\theta$ *с хоризонталната равнина. Под какъв ъгъл* $\alpha_0$ *спрямо хоризонта и с каква минимална начална скорост*[7] $v_0$ *трябва да изстреляме снаряд, за да порази мишената?*

Очевидно задачата е определена, т.е. трябва да има решение, защото е налице необходимото допълнително условие – в случая изискването за минимум на големината на началната скорост на снаряда.

В хода на решението (по-сскоро – на решенията), както и в последващите коментари ще покажем някои възможности за развиване на математическото мислене и на креативното мислене, които заслужава да се пробват в индивидуалната работа с учениците със специална нагласа към овладяване на физиката и математиката.

**Качествен анализ на решението**

Като отчетем, че и $h_{\max}$ в (6), и $l_{\max}$ в (7) имат смисъла на разстоянието $R$, фигуриращо в условието на задачата, виждаме[8], че всъщност (6) и (7) отговарят на поставения в задачата въпрос в два частни случая, т.е. при две конкретни стойности на ъгъла $\theta$, сключен между посоката към мишената и оста $Ox$:

(8,*а*) при $\theta = 90°$: $v_0 = \sqrt{2gR}$ и $\alpha_0 = 90^0$

(8,*б*) при $\theta = 0°$: $v_0 = \sqrt{gR}$ и $\alpha_0 = 45^0$.

Разсъждения на качествено равнище, основаващи се както на изученото в клас, така и на житейския опит, водят до някои предварителни, но съществени изводи за резултата от решението на задачата, на ограниченията, наложени от избрания модел, и т.н. Същевременно тези разсъждения илюстрират и някои типични за научния метод прийоми.

*Граници, в които се променят неизвестните величини*

Както вече бе отбелязано, в модела, с който работим, и снарядът, и мишената се разглеждат като материални точки. Въпреки че всяко оръдие може да изстрелва снаряди само с ограничена по големина начална скорост, моделът включва още предположе-

[7] Началната скорост на снаряда може да се променя чрез промяна на количеството взривно вещество в гилзата – начин, използван миналия век в зенитната артилерия.

[8] На този етап се очертава следното неудобство в означенията. По същество в задачата се търсят две неизвестни, които са функции на две променливи: $v = v(\theta,R)$ и $\alpha = \alpha(\theta,R)$. В училищните програми по математика обаче функциите на две променливи не фигурират. Тъй като тук не разглеждаме задача, която трябва да решават всички ученици, учителят може просто да съобщи какъв е смисълът на записа $v = v(\theta,R)$ и $\alpha = \alpha(\theta,R)$ – както ще стане ясно по-долу, повече от това не е необходимо. Това неудобство може да се заобиколи, като в случай, че разглеждаме зависимостта на $v$ от $R$ при фиксирано $\theta$ вместо $v(\theta,R)$ пишем $v^{\theta}(R)$ и $v^{R}(\theta)$ – в обратния случай. Такъв запис обаче също има своите неудобства – едно означение от вида $v_0^{90^0}(R)$ не е по-разбираемо от $v_0(90°, R)$. Затова по примера на формулите (8) във всеки определен случай изрично ще посочваме коя от двете величини $\theta$ и $R$ смятаме фиксирана и коя – променлива.

нието, че $v$ е неограничено, т.е. лежи в интервала $(0, \infty)$, а оръдието може да стреля във всяка посока от интервала $(0°, 90°)$ за α. **Очевидно е** обаче, че началният ъгъл α не може да бъде по-малък от θ! Наистина, тъй като гравитацията отклонява снаряда надолу от правата, минаваща през т.$O$ и т.$C$ (фиг.1), когато оръдието е насочено по-ниско от целта, колкото и голяма начална скорост да придаваме на снаряда, той ще мине под нея Освен с „**Очевидно е...**", съображения от този род често се изразяват и с думите „**От физични съображения е ясно, че...**".

И така, първият извод, който правим, е, че двете неизвестни – минимална начална скорост и съответният ѝ начален ъгъл, лежат в интервалите:

(9) $0 < v_0 < \infty$ и $\theta < \alpha_0 \leq 90°$.

*Съществуване на решението*

Качествените разглеждания позволяват да обосновем съществуването на решение на задачата. Наистина, да си представим, че оръдието е насочено под произволен, но фиксиран начален ъгъл $\alpha \geq \theta$ (фиг. 1) и изстрелва последователно снаряди, чиято начална скорост $v$ последователно нараства от нула до безкрайност. Когато $v$ е малка (например, ако не е достатъчна при стрелба във вертикално направление снарядът да достигне височина $R$, т.е. при $v < \sqrt{2gR}$), снарядът със сигурност няма да достигне мишената. От друга страна, **интуитивно** (или **от всекидневния опит**) е ясно, че при много големи начални скорости снарядът със сигурност ще прехвърли мишената, ще премине над нея.

От двете твърдения:

– при достатъчно малка начална скорост снарядът не достига мишената;
– при достатъчно голяма начална скорост снарядът прехвърля мишената

следва заключението, че:

*За всеки фиксиран начален ъгъл α от интервала* $\theta \leq \alpha \leq 90°$ *съществува такава начална скорост* $v$, *при която траекторията минава през мишената*.

Това заключение неявно (т.е. без да се споменава изрично) се основава на **съображението за непрекъснатост**. (Програмата по математика за 11. клас включва изучаване на свойството непрекъснатост на функция.) С други думи, всяка неподвижна мишена може да бъде поразена по безкрайно много траектории, стига за всеки начален ъгъл $\alpha > \theta$ да използваме съответната на него подходяща начална скорост $v$.

Измежду всички тези начални скорости $v$, съответстващи на различните начални ъгли, със сигурност съществува една, чиято големина е минимална – именно нея означаваме с $v_0$, а с $\alpha_0$ – съответния начален ъгъл, при който с тази начална скорост траекторията минава през мишената.

Направените разсъждения потвърждават коректността на задачата – изискването за минимална начална скорост се оказва достатъчна гаранция за съществуването на решение.

*Независимост на* $\alpha_0$ *от* $R$

Съществуването на решение гарантира, че всяка от неизвестните $\alpha_0$ и $v_0$ може да се изрази чрез известните $R$ и θ. (Разбира се, в крайния резултат може да участва и ускорението $g$ на свободното падане.) От съображения, свързани с размерността на величините, може да направим извод, че $\alpha_0$ не зависи от $R$. Наистина, размерностите на участващите в (5) величини, са както следва:

$$[R] = L,\ \ [g] = L.T^{-2},\ \ [v_0] = L.T^{-1},\ \ [\theta] = [\alpha_0] = 0.$$

Тъй като търсеният ъгъл $\alpha_0$ е безразмерна величина, той не може да зависи от $g$, защото размерността на $g$ съдържа времето $T$ и тази зависимост от $T$ не може да се компенсира от размерностите на зададените $R$ и $\theta$, които не съдържат времето.

Оттук обаче, по същата причина, следва заключението, че $\alpha_0$ не може да зависи и от $R$, защото без $g$ няма как да се компенсира размерността $L$ на разстоянието. Така, от чисто качествени съображения, следва заключението, че всъщност $\alpha$ е някаква функция само на ъгъл $\theta$, под който от оръдието се вижда целта:

$$\alpha_0 = f(\theta). \tag{10}$$

Този извод ще бъде потвърден от количествените разглеждания.

Фактът, че $\alpha_0$ не зависи нито от разстоянието до целта, нито от земното ускорение показва, че за поразяване с минимална начална скорост на цели, намиращи се върху една права с оръдието, не е необходимо то да бъде пренасочвано, и няма значение дали стрелбата е на Земята, или на Луната.

Относно $v_0$ подобни свързани с размерностите разсъждения не водят до толкова конкретен резултат. Наистина, размерността на $v_0$ съдържа размерността на времето – $T$, но $T$ се съдържа и в размерността на $g$. Единствената комбинация от известните величини $R$ и $g$ обаче, която има размерност на скорост, е $\sqrt{Rg}$. Така от съображения за размерност стигаме само до извода, че $v_0$ е функция не на $R$ и $g$ поотделно, а на тяхната комбинация $\sqrt{Rg}$, умножена с някаква подлежаща на определяне функция на $\theta$. Оттук следва и зависимостта $v \sim \sqrt{R}$, т.е. при 4-кратно увеличаване на разстоянието, минималната скорост трябва да се увеличи само два пъти.

*Върху кой от двата клона на траекторията лежи мишената?*

По принцип дали мишената се намира[9] върху възходящия, върху низходящия клон на траекторията или във върха на параболата, зависи от началната скорост $v$, и от $R$ и $\theta$. Когато обаче снарядът е изстрелян с **минималната** възможна скорост $v_0$, мишената винаги се оказва върху низходящия клон на траекторията, независимо от $R$ и $\theta$.

Наистина, да прибегнем отново до аргумента, който по-горе нарекохме „*съображение за непрекъснатост*”. В случая неговата същност се съдържа в следното разсъждение.

Използваме факта, че в двата гранични частни случая отговорът на поставения въпрос е известен:

– В случая $\theta = 0°$, т.е. когато посоката към мишената е хоризонтална (вж. фиг. 1), снарядът трябва да се изстреля под ъгъл 45° спрямо хоризонта и когато падне на земята, той вече е преминал през максимума на траекторията, т.е. мишената е в края на нейния низходящ клон.

– В случая $\theta = 90°$, т.е. когато мишената е точно над оръдието (вж. фиг.1), снарядът се движи по вертикална отсечка: първо нагоре, достига максимална височина, след което пада обратно по същата отсечка към оръдието. Такава траектория се нарича **двойна отсечка** и може да си я представяме като една безкрайно сплескана парабола. В този случай мишената е точно във върха на траекторията, където е началото на низходящия клон на траекторията.

Така и в двата частни случая (т.е. на самите граници на интервала, в който се променя $\theta$) мишената е разположена все върху низходящия клон на траекторията. Тъл-

[9] Когато говорим, че мишената може да се намира върху единия или върху другия клон на параболата, нямаме предвид възможност за движение, за преместване на мишената, а това, че измежду безкрайно многото траектории, които минават през мишената, има такива, върху тя лежи на участъка, по който снарядът набира височина, и други, по които снарядът вече пада към земята.

кувани от такава гледна точка, тези известни факти водят до предположението, че при всяка възможна стойност на $\theta$ простреляната с минимална скорост мишена се оказва разположена върху низходящия клон на съответната траектория.

За да потвърдим или отхвърлим това предположение (тази хипотеза), си представяме, че $\theta$ е не точно 0°, а приема някаква малка стойност, т.е. мишената е малко над хоризонта на оръдието. Няма физични съображения да очакваме, че тази малка промяна на $\theta$ ще предизвика прескачане на мишената върху възходящия клон на траекторията. С други думи, разчитаме, че малка промяна на положението на мишената предизвиква също малка промяна на траекторията, като мишената все още остава близо до края на низходящия ѝ клон.

Това разсъждение може да се повтори многократно, тъй като в интервала $0 \leq \theta \leq 90°$ не съществува такъв ъгъл $\theta$, отличаващ се от останалите ъгли с някаква привилегирована стойност, с някакво по-специално, отличаващо го от останалите ъгли качество, поради което можем да очакваме мишената да „прескочи" върху възходящия клон. Така, чрез многократно прилагане на проведеното разсъждение, т.е. на малки стъпки, стигаме до края на интервала (т.е. – до $\theta = 90°$), където, вече видяхме, мишената е все още върху низходящия клон на траекторията (по-точно – в самото му начало).

Така стигаме до извода, че направеното предположение е вярно.

Именно за такъв вид разсъждения казваме, че до даден извод сме стигнали от *съображения за непрекъснатост*. Разбира се, този начин следва да се използва внимателно, за да не пропуснем наличието на някакво *привилегировано значение* на независимата променлива (в случая ъгъл $\theta$), чиито дори и малки промени са способни да предизвикат големи изменения или на величината, или в състоянието, които следим[10]. (В дадения случай следим промяната не на някоя величина, а на положението на мишената върху единия или върху другия клон на траекторията).

Както ще се убедим по-долу, направеният от съображения за непрекъснатост качествен извод се потвърждава и от количествените пресмятания.

*Колко траектории минават през мишената при $v > v_0$?*

Снаряд, изстрелян с минималната начална скорост $v_0$, поразява мишената само ако началната му скорост сключва с хоризонта определен ъгъл $\alpha_0$. Очевидно е, че стрелбата може да бъде успешна и при начална скорост $v$, която е по-голяма от $v_0$, но евентуално при друг, подходящ начален ъгъл $\alpha \neq \alpha_0$. На качествено равнище може да потърсим отговор и на въпроса колко такива ъгли съществуват.

За целта използваме съображения, свързани с друг граничен (екстремен) случай – случаят, в който снарядът е изстрелян с много голяма скорост $v$, т.е. при $v >>> v_0$. Такъв снаряд може да порази неподвижна мишена по два начина, т.е. – при два начални ъгъла $\alpha_1$ и $\alpha_2$.

Едната възможност е да насочим оръдието към мишената[11] (т.е. при $\alpha \approx \theta$). В този случай снарядът достига целта почти „мигновено", т.е. той „няма време" да се отклони от посоката, в която е изстрелян. Параболата, по която се движи снарядът, е „раз-

[10] Наличието на калкулатори позволява да покажем на практика какво означават понятията прекъснатост и непрекъснатост на функция. Като пример може да се използва функцията $\mathrm{tg}\theta$ при $\theta \approx 90°$. Сравнете процентната промяна на $\mathrm{tg}\theta$ при нарастване на $\theta$ примерно от $\theta = 89{,}80°$ до $\theta = 89{,}85°$. Впечатляващо е, че едно нищожно увеличение на ъгъла с 0,05° предизвиква многократно увеличение на тангенса му. В този пример особената, привилегированата стойност на ъгъла е $\theta = 90°$. При нея стойността на функцията тангенс става безкрайно голяма, самата функция в тази точка е прекъсната.

Не е такова обаче положението при функцията $\sin\theta$. Същото увеличение на аргумента в близост до $\theta = 90°$ предизвиква нищожно нарастване на фукцията, защото при $\theta = 90°$ тя е непрекъсната и нещо повече – там тя има и екстремум.

[11] Артилеристите наричат този случай *стрелба с право мерене*.

тегната” до почти права линия, т.е. върхът ѝ е отишъл в безкрайност и мишената се оказва върху възходящия клон на траекторията, а времето за достигане до мишената е почти нула.

Другата възможност е да насочим оръдието почти вертикално нагоре ($\alpha \approx 90°$). Изстреляният с много голяма скорост снаряд излита нагоре и времето за издигане и падане се оказва достатъчно, за да може той за това време да се премести в хоризонтална посока до целта, въпреки че хоризонталната компонента на скоростта му е много по-малка от вертикалната. В този случай мишената се оказва върху низходящия клон на траекторията, а времето за полета на снаряда – безкрайно голямо.

И в този случай няма привилегировани стойности – този път – на скоростта $v$. Този факт отново позволява от съображения за непрекъснатост да заключим, че при начална скорост, по-голяма от минималната, съществуват поне два ъгла на наклона на оръдието, при които траекторията на снаряда минава през мишената. По-долу, при количествените решения, ще се убедим, че траекториите наистина са само две.

**Количествени решения**

*Първо решение – чрез съображения за простота*

Обикновено математическият израз на една зависимост между няколко свързани физични величини е максимално прост и нерядко – (в някакъв смисъл) „елегантен”. В този случай съществена роля за намиране на зависимостта може да изиграе досещането, сполучливото предположение или още – моментът на „прозрение”. Разглежданата задача предоставя възможност за илюстриране на въпросния подход.

За целта използваме направеното чрез качествени аргументи заключение (10) за независимостта на ъгъл $\alpha_0$ от разстоянието $R$, т.е., че $\alpha_0 = f(\theta)$. Единствената известна информация за функцията $f(\theta)$ са нейните стойности в краищата на интервала, в който се променя ъгъл $\theta$: когато мишената и оръдието лежат върху една и съща хоризонтална равнина (т.е. при $\theta = 0°$), то $\alpha_0 = 45°$, а когато мишената е точно над оръдието ($\theta = 90°$) – то и $\alpha_0 = 90°$. С други думи:

(11) $$f(0) = \pi/4 \quad \text{и} \quad f(\pi/2) = \pi/2.$$

Разбира се, функциите, удовлетворяващи условията (11), са безкрайно много. При липса на други аргументи (какъвто е случаят) може да се прибегне до т.нар. *съображения за простота.* Най-простото предположение, което бихме могли да направим, е, че зависимостта между $\alpha_0$ и $\theta$ е линейна, т.е.:

(12) $$\alpha_0 = f(\theta) = k\theta + p,$$

където $k$ и $p$ са безразмерни константи, определяни от условията (11). Едно основание за точно такова предположение е фактът, че от две условия (11) може да се определят само два параметъра. Всяко друго предположение би внесло в разглежданията нови параметри, за чието определяне няма информация, а вече знаем, че задачата има определено решение.

Наистина, като заместим стойностите на $f(0)$ и $f(\pi/2)$ от (11) в (12), получаваме две уравнения:

(13) $$k.0 + p = \frac{\pi}{4} \quad \text{и} \quad k.\frac{\pi}{2} + p = \frac{\pi}{2},$$

чието решение е:

(14) $$k = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad p = \frac{\pi}{4}.$$

По такъв начин за търсената зависимост на $\alpha_0$ от $\theta$ получаваме израза:

(15) $$\alpha_0 = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

За да намерим и началната скорост, която трябва да придадем на снаряда, решаваме (5) спрямо $v_0$ и заместваме $\alpha_0$ от (15) в дясната страна на полученото равенство. След като преобразуваме[12] получения израз, получаваме окончателно:

$$v_0 = \sqrt{gR(1+\sin\theta)} = \sqrt{gR}\left(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right) \qquad (16)$$

– два израза, които явно могат да претендират за простота, а вторият – дори и за „елегантност", изразяваща се в симетричното участие на двете тригонометрични функции..

И така, предположението за линейност на връзката между $\alpha$ и $\theta$ се оказа достатъчно за получаване на формулите (15) и (16). Стои обаче въпросът какво е отношението на тези изрази към проблема за *минималност* на началната скорост. За да докажем, че при всеки друг начален ъгъл $\alpha$, различен от (15), необходимата за поразяване на мишената начална скорост $v$ е по-голяма от определената от (16), решаваме (5) спрямо $v^2$ и преобразуваме получения израз във вида:

$$v^2 = \frac{gR}{2}.\frac{\cos\theta}{\cos^2\alpha(\tan\alpha - \tan\theta)} = \frac{gR}{2}.\frac{\cos^2\theta}{\cos\alpha\sin(\alpha-\theta)}. \qquad (17)$$

Като образуваме чрез (16) отношението $\left(\frac{v}{v_0}\right)^2$ , получаваме оценката:

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 = \frac{1}{2}.\frac{\cos^2\theta}{\cos\alpha\sin(\alpha-\theta)(1+\sin\theta)} = \frac{1}{2}.\frac{1-\sin\theta}{\cos\alpha\sin(\alpha-\theta)} = \frac{1-\sin\theta}{\sin(2\alpha-\theta)-\sin\theta} > 1.$$

От нея се вижда, че наистина за поразяване на мишената при начален ъгъл, различен от определения от равенство (15), трябва да придадем на снаряда скорост, по-голяма от (16).

Това заключение потвърждава правилността на предположението (хипотезата) за линейна връзка между $\alpha$ и $\theta$.

*Второ решение – отново чрез съображения за простота*

В първото решение започнахме с обсъждане на възможната зависимост на началния ъгъл $\alpha$ от ъгъла $\theta$, определящ посоката към мишената. Допустим е обаче и обратният подход – да започнем с обсъждане на възможната зависимост на минималната начална скорост от разстоянието до мишената. Отново са налице две стойности на $\theta$, за които знаем как $v_0$ зависи от $R$. От (8, *а* и *б*) се вижда, че както при $\theta = 0$, така и при $\theta = 90°$:

$$v_0 \sim \sqrt{gR}. \qquad (18)$$

(На качествено равнище до подобно заключение стигнахме и от съображения за размерност.)

Разликата между двата частни случая е само в множителя пред $gR$, който в единия случай е 2, а в другия – 1. Тази констатация естествено води до предположението, че зависимостта от $\theta$ се съдържа в една неизвестна за сега функция $F(\theta)$, участваща като множител под корена, т.е., че търсената зависимост на $v_0$ от $R$ и $\theta$ е от вида:

$$v(\theta) = \sqrt{gRF(\theta)}\ . \qquad (19)$$

Единственото, което е известно за $F(\theta)$, е, че:

$$F(0) = 1 \quad \text{и} \quad F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2. \qquad (20)$$

Разбира се, и в този случай функциите, удовлетворяващи условията (20), са неизброимо множество, така че за да определим $F(\theta)$, се налага отново да използваме *съображения за простота*. Практиката за решаване на подобни задачи показва, че би било твърде невероятно да се окаже, че $F(\theta)$ е някаква специална функция (например функция на Бесел). В случая обаче и най-простото предположение (например линейната функция $F(\theta) = 1 + \frac{2}{\pi}\theta$ удовлетворява (20)) не е подходящо, защото всяка поява на

---

[12] При преобразуванието е удобно да се използва формулата $\tan\alpha - \tan\theta = \frac{\sin(\alpha-\theta)}{\cos\alpha\cos\theta}$.

полиномиална зависимост на $\alpha$ от $\theta$ също би изглеждала странно. Би трябвало да конструираме някаква проста комбинация от тригонометрични функции, която удовлетворява условията (20). Като отчетем какви са стойностите на $\sin\theta$ в краищата на интересуващия ни интервал и отново ръководейки се от съображения за простота, можем да предположим, че $F(\theta)$ има вид:

(21) $$F(\theta) = 1 + \sin\theta.$$

С други думи, и в този случай предполагаме линейност на търсената функция, но аргументът вече е не $\theta$, а $\sin\theta$. След това заместваме $F(\theta)$ от (21) в (19) и получаваме, разбира се, познатия резултат (16).

За да установим и зависимостта $\alpha_0 = \alpha_0(\theta)$ на началния ъгъл от положението на мишената, е достатъчно да заместим $v_0$ от (16) в (5) и да решим полученото уравнение спрямо $\alpha_0$. За целта е удобно с помощта на формулата:

(22) $$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$$

да сведем проблема до решаване на квадратно уравнение за $\tan\alpha_0$. Оказва се, че това уравнение има двоен корен и той е:

(23) $$\tan\alpha_0 = \tan\theta + \frac{1}{\cos\theta}.$$

Оказва се също, че зависимостта на $\alpha_0$ от $\theta$ може да се сведе по форма до (15), ако използваме, че $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = 1$ и преобразуваме по подходящ начин (23):

$$\tan\alpha_0 = \tan\theta + \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\left(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right)^2}{\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)} = \tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right).$$

Сравнението между изразите в началото и в края на тази редица от равенства показва, че (23) наистина е еквивалентно на (15).

И така, предположението, че от съображения за простота обобщението на формулите (8) е от вида (19), а предположенето, че функцията $F(\theta)$ се описва с формула (21), водят до същия резултат, получен и по първия начин. По този начин се оказва, че и в двете решения, тръгвайки от познатите значения на търсената функция в два частни случая за $R$ и $\theta$, с помощта на съображения за простота стигаме до изрази, валидни за всяка стойност[13] на $v$ и $\theta$.

Каква тежест може да имат подобни решения? Бихме ли получили същия резултат, ако използваме и други начини за обобщаване на формулите (8)? Съществуват два начина за отговор на подобни въпроси. Единият е, в определен смисъл, експериментален: действително да изстрелваме снаряди по произволно разположени мишени и да сравняваме резултатите за минималната скорост с предсказанията на формули (15) и (16). Ясно е обаче, че колкото и многобройни примери в подкрепа на тези формули да получим, увереност в тяхната общовалидност няма да получим, защото според известното правило:

*С примери не може да се докаже, че едно твърдение е общовалидно, докато един единствен контрапример е достатъчен да обори общата валидност на всяко твърдение.*

Втори начин за доказване на валидността на резултата, получен с помощта на някаква догадка, е той да бъде изведен като следствие от по-общи и общоприети твър-

[13] Може би си заслужава да се потърси решение при друг избор на функцията $F(\theta)$, например $F(\theta) = 2 - \cos\theta$, $F(\theta) = 1 + \mathrm{tg}\,\theta/2$, или $F(\theta) = 1 + \sin^2\theta$ и др. Тези три функции удовлетворяват условията (20), като особено първата от тях не отстъпва по простота на (21). (Разбира се, нито една от тях не води до търсеното решение.) Това би изяснило на кой етап от решението се установява, че изборът неподходящ.

дения. В нашия случай това не е трудно, защото задачата може да се реши и като обикновена учебна задача.

*Трето решение – чрез досещане*

Задачата допуска строго и без използване на средства на висшата математика решение, което обаче изисква известна досетливост, която се постига само след достатъчно голяма практика за решаване на подобни задачи. Известно е например, че съществуват задачи за търсене на екстремум, които допускат решение чрез допълване на определени изрази до пълен квадрат. Тук случаят е различен, но идеята е същата – да се приведе изразът за разглежданата функция във вид, от който да се заключи при каква стойност на аргумента е екстремумът му.

За целта за $v^2$ използваме израза (17):

(24) $$v^2 = \frac{gR}{2} . \frac{\cos\theta}{\cos^2\alpha.(\tan\alpha - \tan\theta)}.$$

В дясната страна на (24) $g$, $R$ и $\theta$ са константи, т.е. разглеждаме $v^2$ като функция на $\alpha$. Самото равенство показва, че за всяка двойка ъгли $\alpha$ и $\theta$ (в която $\alpha \geq \theta$), съществува такава начална скорост $v$, при която траекторията минава през мишената (факт, установен при качествения анализ). Ние се интересуваме от онова значение $\alpha_0$ на началния ъгъл, при което тази скорост е минимална. При този запис на формулата за $v^2$ обаче зависимостта от $\alpha$ се проследява трудно, тъй като в дясната страна на (24) ъгъл $\alpha$ фигурира в знаменателя двукратно – и като аргумент на косинуса, и като аргумент на тангенса. При това, докато с нарастване на $\alpha$ функцията $\cos^2\alpha$ намалява, другият множител – tg$\alpha$, расте.

За да избегнем това неудобство, първо, отново прилагайки формулата за разлика от тангенсите на два ъгъла, привеждаме (24) във вида:

(25) $$v^2 = \frac{gR}{2} . \frac{\cos^2\theta}{\sin(\alpha - \theta)\cos\alpha} .$$

След това в знаменателя на (25) използваме тъждеството:

(26) $$2\sin\alpha.\cos\beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta),$$

след което (25) придобива вида:

(27) $$v^2 = gR\frac{\cos^2\theta}{\sin(2\alpha - \theta) - \sin\theta}.$$

В (27) ъгъл $\alpha$ вече фигурира еднократно и веднага се вижда, че $v^2$ има минимум, когато изразът в знаменателя има максимална стойност, т.е. при $\sin(2\alpha_0 - \theta) = 1$. Оттук следва $2\alpha_0 - \theta = \frac{\pi}{2}$, или отново:

(28) $$\alpha_0 = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} .$$

Фактът, че този резултат съвпада с (15) гарантира, че използваните съображения за простота наистина водят до правилен отговор. При вече известно $\alpha_0$, по-нататъшното решение на задачата (намирането на $v_0$) или следва пътя, използван в първото решение, или директно чрез заместване на $\alpha_0$ от (28) в (27).

*Четвърто решение – и директно, и елементарно*

Разбира се, съществуват и елементарни решения, които не изискват нито досещане, нито недостатъчно строгите съображения за простота. Един път към такова решение е споменатото свеждане на търсенето на ъгъл $\alpha_0$ към решаване на квадратно уравнение. При него в уравнение (5) с помощта на (22) изразяваме $\frac{1}{\cos^2\alpha}$ чрез tan$\alpha$ и получаваме въпросното уравнение:

(29) $$(\tan\alpha)^2 - \left(\frac{2v}{u}\right)^2 \frac{1}{\cos\theta}(\tan\alpha) + \left(\frac{2v}{u}\right)^2 \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} + 1 = 0.$$

Тук, за съкращаване на записа, използваме означението:

(30) $$u = \sqrt{2gR}\ .$$

Очевидно, величината $u$ има размерност на скорост и по смисъл представлява минималната скорост, с която изстрелян вертикално нагоре снаряд може да достигне височина $R$ (или обратно – скоростта, с която пада на земята пуснат от височина $R$ камък).

Двата корена на (29) са:

(31) $$\tan\alpha_{1,2} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2v}{u}\right)^2 \frac{1}{\cos\theta} \pm \sqrt{\left(\frac{2v}{u}\right)^4 \frac{1}{\cos^2\theta} - 4\left(\frac{2v}{u}\right)^2 \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} - 4}\,\right].$$

Видът на подкоренната величина в (31) показва, че, за достатъчно малки спрямо $u$ начални скорости $v$, подкоренната величина е отрицателна и следователно няма реални начални ъгли, при които мишената да бъде поразена. Ако си представим, че последователно изстрелваме снаряди с все по-голяма начална скорост $v$, ще достигнем такова значение $v_0$, при което подкоренната величина в (31) става нула – това е точно търсената минимална скорост. При по-нататъшното нарастване на $v$ уравнение (29) вече има два реални корена, т.е. два начални ъгъла, при които съответната траектория минава през мишената. Следователно търсената минимална скорост се определя от условието:

(32) $$\left(\frac{2v_0}{u}\right)^4 \frac{1}{\cos^2\theta} - 4\left(\frac{2v_0}{u}\right)^2 \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} - 4 = 0\ .$$

Положителният корен на това квадратно за $\left(\frac{2v_0}{u}\right)^2$ уравнение е:

$$\left(\frac{2v_0}{u}\right)^2 = 2(1 + \sin\theta).$$

Като заместим тук $u$ от (30) и решим спрямо $v_0$, получаваме, разбира се, познатия израз (16). По-нататък намирането на началния ъгъл $\alpha_0$ следва пътя, използван при второто решение.

Вижда се, че това четвърто решение наистина не използва нито догадки и съображения без доказателствена сила, нито елементи на висшата математика, което е и неговото предимство от гледна точка на обучението в училище. Вярно е, че то изисква определено ниво на рутина при работата с тригонометрични функции, но това не означава, че необходимите формули трябва да се знаят наизуст – достатъчно е знанието за тяхното съществуване, а при наличието в интернет на съответните справочници по математика, решението вече не е проблем.

*Пето решение – „канонично”*

Разбира се, задачата допуска, и конвенционално (канонично) решение, към което най-напред би прибегнал всеки, знаещ алгоритъма за търсене на екстремум на функция. Тук маркираме този начин за решение само за пълнота.

За целта привеждаме (5) във вида (24) и диференцираме получения израз по отношение на $\alpha$. Доколкото $\alpha$ фигурира само в знаменателя на дясната страна на (24), то условието за екстремум $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\alpha} = 0$ е изпълнено там, където е нула производната на този знаменател, т.е. при:

$$1 + \tan\theta\tan 2\alpha = 0.$$

И без да се решава уравнението, се вижда, че, за да бъде изпълнено равенството, един от множителите tgθ или tg2α трябва да бъде отрицателен. Тъй като първият от тях по принцип е положителен, то следва със сигурност, че $\alpha > 45°$. Решението на това тригонометрично уравнение се оказва, разбира се, познатата формула (15).

Намирането по-нататък на $v_0$ следва вече познат път. Вижда се, че това решение е достъпно само за ученици, които по математика са изучавали как се търсят екстремуми на функции и, подобно на предишните четири решения, също изисква свободно боравене с тригонометрични изрази и решаване на тригонометрични уравнения – едно от изискванията за изграждане на математическа компетентност.

**Коментари и следствия**

Направените количествени разглеждания позволяват да излезем от рамките на задачата за поразяване на мишената с минималната възможна скорост и да изградим една по-обща картина за зависимостта на траекторията на снаряда от положението на мишената, т.е. за зависимостта на $v$ и α от $R$ и θ.

Докато първите три решения водят директно до отговора на въпросната задача, четвъртото, макар и по-дълго, предоставя повече възможности за коментари относно характера на траекторията на снаряда (например дали параболата е повече, или по-малко разтворена, от какво зависи върху кой клон на траекторията се разполага мишената и др.). Както от качествените разглеждания, така и от четвъртото решение знаем, че при скорости, по-големи от минималната, задачата за началния ъгъл има две решения. Първият въпрос, чиито отговор ще потърсим, е:

*Върху кой клон на траекторията се намира мишена, поразена от снаряд, изстрелян с минималната възможна скорост*?

При качествения анализ стигнахме до заключение, че изстреляният с възможно минималната начална скорост снаряд поразява мишената, след като е преминал максимума на траекторията си, т.е. мишената лежи върху низходящия клон на траекторията. Разполагайки с резултата (28), вече можем да потвърдим този резултат и с количествени аргументи.

Наистина, както вече припомнихме от изученото в клас, снаряд, изстрелян с начална скорост $v_0$ под начален ъгъл $\alpha_0$, би паднал върху хоризонталната равнина на разстояние $l = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha_0$. Половината от това разстояние, т.е.:

(33) $$L = \frac{l}{2} = \frac{v_0^2}{2g}\sin 2\alpha_0 \ ,$$

представлява абсциса на върха на траекторията (двата клона на траекторията са разположени симетрично от двете страни на вертикалата през върха ѝ!). В същото време абсцисата на мишената е $R\cos\theta$, така че знакът на разликата $R\cos\theta - L$ определя върху кой от двата клона на траекторията лежи мишената. С помощта на формули (16), (17) и (33) за тази разлика получаваме:

$$R\cos\theta - L = R\cos\theta - \frac{R(1+\sin\theta)}{2}\sin 2\alpha_0 = \frac{1}{2}R\cos\theta(1-\sin\theta) \geq 0 \ .$$

Неравенството показва, че при минималната въможна скорост мишената наистина винаги лежи върху низходящата част от траекторията.

Този пример илюстрира възможността понякога въз основа на качествени аргументи (в случая – съображенията за непрекъснатост) да се правят заключения, без да се използват количествени разглеждания.

*При каква начална скорост* $v`$ *и при какъв начален ъгъл α` снарядът поразява мишена, намираща се в най-високата точка от траекторията?*

Този въпрос може да се разглежда като самостоятелна задача, алтернативна на първата. Докато в първата роля на допълнителна връзка между ($R$, θ) и ($v_0$, $\alpha_0$) бе изискването за минимум на $v$, сега тази роля играе условието мишената да бъде във върха на траекторията.

Дотук максималната височина $H$ и максималното отдалечаване $l$ от оръдието в хоризонтална посока на снаряд, изстрелян с начална скорост $v`$ под ъгъл α`, описвахме с формулите:

(34) $$H = \frac{v`^2}{2g}\sin^2\alpha` \quad \text{и} \quad l = 2L = \frac{v`^2}{g}\sin 2\alpha`,$$

където отново $L$ е абсцисата на върха на траекторията.

Като разделим първото от тези две равенства на второто и отчетем (4), получаваме, че мишената ще се окаже във върха на траекторията, ако двата ъгла са свързани с равенството:

(35) $$\tan\alpha` = 2\tan\theta.$$

Както и трябва да се очаква, условието $\alpha' > \theta$ е изпълнено. Освен това, с помощта на (28), лесно се проверява, че разликата:

$$\tan\alpha_0 - \tan\alpha` = \tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right) - 2\tan\theta = \frac{1-\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{\theta}{2}} > 0\ ,$$

т.е. ъгълът $\alpha`$, при който снарядът поразява мишена в най-високата точка от траекторията си, е по-малък от ъгъла $\alpha_0$, при който мишената се поразява с минимална начална скорост. С други думи, $\alpha`$ е онова решение на (31), в което знакът пред квадратния корен е отрицателен. При това, както и в случая с минималната скорост, и този път търсеният ъгъл не зависи от разстоянието до целта и се определя само от ъгъла, под който тя се вижда от оръдието.

Търсената начална скорост намираме, като от (35) определим $\sin\alpha`$ или $\sin 2\alpha`$, заместим получения израз в съответното равенство (34) и решим полученото уравнение спрямо $v`$:

(36) $$v` = \sqrt{2gR\,\frac{3\sin^2\theta+1}{4\sin\theta}}.$$

За контрол с помощта на (15) и (36) можем проверим знака разликата $v`^2 - v^2$:

$$v`^2 - v_0^2 = (1-\sin\theta)^2 \geq 0.$$

Това неравенство потвърждава, че началната скорост на снаряд, който поразява мишена във върха на траекторията си, е не по-малка от определената с формула (17).

*Как началният ъгъл $\alpha$ зависи от началната скорост при $v > v_0$?*

Въпросната зависимост се определя от формула (31). Да си представим отново, че при фиксиран ъгъл $\alpha$ започваме да изстрелваме снаряди с все по-голяма начална скорост $v$ . В интервала $0 \leq v < v_0$ те не достигат мишената ($v_0$ се определя от (16)). При $v = v_0$ една единствена траектория минава през мишената и нейните параметри ($\alpha_0$ ,$v_0$) се определят от (15) и (16). При $v > v_0$, в съответствие с формула (31), съществуват два начални ъгли $\alpha_1$ и $\alpha_2$, при които траекторията минава през мишената – единият по-голям, другият –по-малък от $\alpha_0$ (15). Да проследим как всеки от тези ъгли се променя при увеличаване на началната скорост.

От формула (31) се вижда, че при $v \to \infty$ и знак „+” пред квадратния корен, то $\tan\alpha_1 \to \infty$ и следователно:

(37) $$\alpha_1 \to \frac{\pi}{2}.$$

Този резултат показва, че при увеличаване на началната скорост началният ъгъл на разположената по-високо траектория расте, като при безкрайно голяма скорост клони към 90°, т.е. оръдието трябва да бъде насочено почти вертикално – факт, които установихме (без доказателство!) въз основа на качествените разглеждания.

Малко повече внимание изисква проследяване на поведението на ъгъл $\alpha_2$, т.е. когато знакът пред квадратния корен в (31) е отрицателен. Ако за съкращаване на записа означим с:

(38) $$\xi = \left(\frac{2v}{u}\right)^2$$

безразмерната величина $\xi$, формула (31) може да се запише във вида:

$$\tan\alpha_2 = \frac{\xi}{2\cos\theta}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{4\sin\theta}{\xi} - \frac{\cos^2\theta}{\xi^2}}\right]$$

От (38) се вижда, че при $v \to \infty$, то и $\xi \to \infty$. Тогава, като пренебрегнем членовете от порядък $1/\xi^2$ и по-висок, и използваме формулата[14]:

$$\sqrt{1-\xi} \approx 1 - \xi/2,$$

получаваме:

$$\tan\alpha_2 \to \frac{\xi}{2\cos\theta}.\frac{4\sin\theta}{2\xi} = \tan\theta,$$

откъдето следва, че при $v \to \infty$ е изпълнено равенството:

(39) $$\alpha_2 \to \theta.$$

В този случай снарядът се движи практически по права линия, т.е. параболата се е „отворила” максимално, максимумът ѝ е отишъл в безкрайност и мишената се оказва върху възходящия ѝ клон.

Формули (37) и (39) потвърждават изводите, които направихме при качествения анализ на задачата: при много голяма начална скорост мишената може да бъде поразена или чрез „право мерене” ($\alpha \to \theta$), или чрез стрелба в почти вертикална посока ($\alpha \to 90°$). В първия случай снарядът поразява мишената „мигновено”, във втория – след безкрайно дълго време[15].

*Върху кой клон от траекторията се намира мишената при $v > v_0$?*

От получените дотук резултати следва, че през мишена с координати ($R$, $\theta$) минават неограничен брой траектории, всяка от които се определя от подходящи по големина начална скорост $v$ и начален ъгъл $\alpha$. Тези параметрите на траекторията лежат съответно в интервалите:

(40) $$v_0 \le v < \infty \quad \text{и} \quad \theta \le \alpha \le \pi/2,$$

където $v_0$ се определя от (16). Според (31) за всяка начална скорост $v$ от указания интервал съществуват два начални ъгли $\alpha_1 > \alpha_2$, при които мишената се оказва върху траекторията на снаряда.

Вече установихме, че за всяко $\alpha$ от интервала $\theta \le \alpha \le \pi/2$, при $v = v_0$ мишената лежи върху низходящия клон на единствената траектория, минаваща през нея. От *съображения за непрекъснатост* можем да очакваме, че ако началната скорост $v$ е само малко по-голяма от $v_0$, двете траектории през мишената, отговарящи на ъглите $\alpha_1$ и $\alpha_2$, няма да се различават съществено от $\alpha_0$ и мишената ще продължи да лежи върху низходящия клон на всяка от тях.

Възможно ли е, както при качествения анализ, да смятаме, че по този начин на разсъждение можем да заключим, че за всяка стойност на началната скорост мишената ще остава върху низходящия клон на всяка от двете траектория? Отговорът на този въпрос е отрицателен, защото вече познаваме един контрапример, при който това не е вярно: когато $v \to \infty$ и стрелбата е при по-малкия от двата начални ъгли ($\alpha_2 \to \theta$), мишената се оказва върху възходящия клон на траекторията. Очевидно съществува причина, която не позволява да прилагаме многократно съображенията за непрекъснатост и тази причина е наличието на определена привилегирована началната скорост на снаряда. При тази привилегирована начална скорост с увеличаване на $v$ става плавен „преход” на мишената от низходящия върху възходящия клон на траекторията. От направените дотук разглеждания е ясно, че това е точно скоростта $v`$ (36), при която началният ъгъл $\alpha`$ удовлетворява (35) и мишената се оказва на върха на траекторията. Именно при

[14] Тук е мястото, където излизаме извън рамките на училищната програма по математика, тъй като тя не предвижда изучаване на въпросната формула. Това затруднение може лесно да се заобиколи, тъй като от (5) пряко следва, че при $v \to \infty$ е изпълнено равенството $\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}\theta$.

[15] Покажете чрез аргументи с качествен характер, че ако два снаряда бъдат изстреляни към една мишена едновременно и с една и съща начална скорост, но единият под ъгъл $\alpha_1$, а другият – под ъгъл $\alpha_2$, пръв ще достигне мишената снарядът, летящ по по-ниската траектория.

тези стойности на $v`$ и $\alpha`$ става преходът на мишената от низходящия към възходящия клон на по-ниската от двете траектории, съответстващи на една и съща начална скорост $v > v`$.

За другия възможен случай, в който мишената се обстрелва при по-големия от двата възможни начални ъгли (31) не съществува привилегирована стойност на ъгъла и затова разсъжденията от съображения за непрекъснатост могат да се проведат докрай. Това означава, че с увеличаване на началната скорост расте и началният ъгъл на стрелбата, а мишената остава винаги върху низходящия клон на траекторията.

И така, при всяко $v > v_0$ и начален ъгъл:

– $\theta \leq \alpha \leq \alpha`$ – мишената е върху възходящия клон на траекторията.
– $\alpha` \leq \alpha \leq \pi/2$ – мишената е върху низходящия клон на траекторията;

*Как началната скорост v зависи от началния ъгъл* $\alpha$?

Да си представим, че при известно положение на мишената (т.е. при зададени $R$, $\theta$) изстрелваме снаряди с различна начална скорост $v$ при фиксиран начален ъгъл $\alpha$. Големината на необходимата за прострелване на мишената скорост се определя от (17), откъдето е ясно, че задачата има решение само при $\alpha > \theta$. От същата формула (17) се вижда, че при $\alpha = \theta$, т.е. когато оръдието е насочено към целта, за да я поразим, трябва да изстреляме снаряда с безкрайно голяма скорост.

От еквивалентната на (17) формула (27) се вижда, че при нарастване на $\alpha$ от $\theta$ до $\alpha_0$ необходимата начална скорост намалява до $v_0$, след което при по-нататъшно нарастване на $\alpha$ расте и при $\alpha \to \pi/2$ отново клони към безкрайност, т.е.:

(41) при $\alpha = \theta$ $\quad v \to \infty$,

(42) при $\alpha = \alpha_0 = \pi/4 + \theta/2$ $\quad v = v_0 = \sqrt{gR(1+\sin\theta)}$ ,

(43) при $\alpha = \pi/2$ $\quad v \to \infty$.

*Коя е границата на опасната зона?*

Никое оръдие не може да изстреля снаряд с безкрайно голяма скорост. Поради това, при всяка крайна стойност на $v$, в пространството има точки, до които снарядът може да достигне – това е опасната зона, и точки, които са недостижими. Нека означим с $v_m$ максималната начална скорост на снаряда. Снаряд с такава начална скорост поразява цел, разположена под ъгъл $\theta$ спрямо хоризонта, разстоянието до която е $R_m$, ако е изпълнена връзката (42):

(44) $$v_m = \sqrt{gR_m(1+\sin\theta)}.$$

Решението на (44) спрямо $R_m$ е:

(45) $$R_m = \frac{v_m^2}{g(1+\sin\theta)}$$

и това решение определя границата на опасната зона.

Формула (45) представлява очевидно обобщение на известните формули за максималното отдалечаване на снаряда в частните случаи $\theta = 0°$ и $\theta = 90°$. Нейното ново тълкуване сега гласи:

*Максималното разстояние* $R_m$, *на което снаряд изстрелян със скорост* $v_m$ *може да порази цел, виждана под ъгъл θ спрямо хоризонта, се определя от формула* (45).

Формула (45) представлява уравнение в полярни координати на крива в първи квадрант на равнината $xOy$, която разделя точките, достижими от изстреляният със скорост $v_m$ снаряд, от недостижимите точки. С други думи, тази крива представлява граница на опасната зона, в която мишената може да бъде поразена.

**Вариант на задачата**

Може да се посочи и втори пример за това, как един нов, по-различен поглед към вече известни резултати може да доведе до формулиране на нов проблем и до неговото решение. Като изходен пункт в случая използваме неочаквано простия вид на зависимостта на $\alpha_0$ от $\theta$ – факт, който провокира да потърсим друг, по-ясен геометричен смисъл на формула (15).

За да достигнем тази цел, използваме познатия вече прийом: търсим ново тълкуване, нов смисъл във вече познати факти – отново знанията за стрелбата в двата частни случа. Първият факт е, че минимална начална скорост, при която един снаряд поразява мишена на хоризонта ($\theta = 0°$), се достига, когато оръдието е насочено под ъгъл $\alpha_0 = 45°$ спрямо хоризонта. Формулирано по друг начин, това твърдение всъщност означава, че за да достигне снарядът с минимална начална скорост до мишена, разположена на хоризонта (т.е. при $\theta = 0°$), оръдието трябва да бъде насочено **по ъглополовящата на ъгъла, заключен между вертикалната посока и посоката към мишената**.

Вторият факт е свързан с другия граничен случай, когато $\theta = 90°$. Знаем, че, за да порази мишената, оръдието трябва да бъде насочено вертикално нагоре, т.е. и $\alpha_0 = 90°$, което означава, че ъгълът между вертикалата и посоката към мишената е $0^0$. Тъй като двете рамена на ъгъл $0^0$ съвпадат, то с тях съвпада и ъглополовящата на този ъгъл, т.е. отново можем да смятаме, че снарядът е изстрелян по ъглополовящата на ъгъла между двете посоки.

И така, новото тълкуване на старите факти гласи: и в двата частни случая, за да достигне мишената с минимална начална скорост, снарядът трябва да се изстреля по посоката на ъглополовящата на ъгъла, заключен между вертикалната посока и посоката към мишената.

Това ново тълкувание на известните факти поставя въпроса дали последното твърдение не е валидно за всеки ъгъл $\theta$?

За проверка на тази хипотеза трябва с помощта на (15) да пресметнем двете разлики $(\pi/2 – \alpha_0)$ и $(\alpha_0 – \theta)$. Фактът, че те се оказват равни е доказателство за верността на твърдението.

(Всъщност, за установяване на това геометрично тълкуване на резултата е достатъчно да запишем (15) във вида:

(46) $$\pi/2 - \alpha_0 = \alpha_0 - \theta$$

и да съобразим, че $(\pi/2 – \alpha_0)$ е ъгълът между вертикалата и посоката на началната скорост, а $(\alpha_0 – \theta)$ – ъгълът между началната скорост и посоката към мишената.)

Направеното заключение позволява да формулираме задачата по нов, може би по-интригуващ от предишния начин:

*Докажете, че когато едно оръдие е насочено по ъглополовящата на ъгъла, заключен между вертикалата и посоката към целта, необходимата за поразяване на целта начална скорост на снаряда е минимална. Намерете зависимостта на тази начална скорост от разстоянието до мишената.*

Втори, по-конкретен вариант на същата задача би могъл да изглежда и по следния начин:

*В подножието на планински склон се намира оръдие, което изстрелва снаряди с начална скорост v. Върху склона, по права линия, която сключва ъгъл $\theta$ с хоризонта, към оръдието бавно се приближава цел. Колко е минималното разстояние R между оръдието и целта, което гарантира нейната безопасност?*

Очевидно формулирана по този начин, задачата обобщава решените още в клас проблеми за максималното разстояние на което се отдалечава снаряд, изстрелян в хоризонтална или във вертикална посока. Също така е ясно, че условието целта да се приближава *бавно* осигурява, че по време на полета на снаряда преместването на целта може да се пренебрегне.

От всичко изложено дотук се вижда как от една относително проста цел (намиране на минималната големина и посоката на началната скорост на снаряда) могат да се направят редица заключения, засягащи по-общия случай на произволна големина на началната скорост.

**Систематизация на резултатите**

За да получим една по-цялостна картина за особеностите на траекторията[16] на снаряда, ще систематизираме получените дотук резултати, за да се откроят по-ясно зависимостите ѝ от $R$, θ, $v$ и α. Съгласно с формула (5) параметрите, които определят траекторията – началната скорост на снаряда $v$ и началният ъгъл α, са свързани с разстоянието $R$ до мишената и с ъгъла θ, сключен между посоката към нея и хоризонта чрез уравнението:

(47) $$\tan\alpha - \tan\theta = \frac{gR}{2v^2}\cdot\frac{\cos\theta}{\cos^2\alpha}.$$

Решенията на това уравнение спрямо $v$ и спрямо α се описват съответно с формулите (27) и (31):

(48,*а*) $$v = \sqrt{gR\frac{\cos^2\theta}{\sin(2\alpha-\theta)-\sin\theta}}$$

и:

(48,*б*) $$\tan\alpha_{1,2} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2v}{u}\right)^2\frac{1}{\cos\theta} \pm \sqrt{\left(\frac{2v}{u}\right)^4\frac{1}{\cos^2\theta} - 4\left(\frac{2v}{u}\right)^2\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} - 4}\right].$$

Последните две формули са основа за изводите относно зависимостите на $v$ и α от $R$ и θ. При това във всички разсъждения по-долу, когато говорим за скорост $v$ и ъгъл α, ще имаме предвид, че $\theta \le \alpha \le 90°$, а $v_0 = \sqrt{gR(1+\sin\theta)} \le v \le \infty$.

*Зависимост на началната скорост от началния ъгъл*

Да проследим чрез формула (48,*а*) как се променя $v$, когато α расте от θ до 90°. Когато α е на долната граница на интервала, т.е. при α = θ (стрелба с право мерене), знаменателят в дясната част на (48,*а*) е нула и началната скорост на снаряда е безкрайно голяма ($v = \infty$). Траекторията в този случай е права линия („параболата се е разтегнала" до права линия, върхът ѝ е отишъл в безкрайност), така че мишената се оказва върху началния участък на възходящия клон на такава „парабола", а снарядът я поразява мигновено (стига, разбира се разстоянието $R$ да е крайно).

[16] Тук и по-нататък под *траектория*, съответно *начална скорост* $v$ и *начален ъгъл* α, винаги визираме такива, които се отнасят до снаряд, поразяващ мишена, чието положение се определя от разстояние $R$ и ъгъл θ.

При постепенно увеличаване на ъгъл α знаменателят в (48,*a*) също расте, т.е. необходимата начална скорост е крайна и намалява. С нарастването на α върхът на параболата постепенно се доближава към координатното начало (намаляват както неговата абсциса, така и неговата ордината), като мишената все още е върху възходящия клон.

Тази тенденция продължава, докато ъгъл α достигне стойността α′, определена с формула (35). При този ъгъл и начална скорост $v'$ (вж. формула (36)) мишената се оказва във върха на траекторията, т.е. при този ъгъл става преходът на мишената от възходящата към низходящата част но траекторията. При още по-големи стойности на α началната скорост продължава да намалява, но мишената вече е върху низходящия клон на траекторията, като абсцисата на нейния връх намалява, а ординатата му – расте.

Тази промяна продължава, докато α достигне стойността $\alpha_0$, определена от формула (15), т.е. докато посоката на изстрела съвпадне с ъглополовящата на ъгъла между вертикалата и посоката към мишената. При този ъгъл мишената може да се порази с минимална начална скорост и при един единствен начален ъгъл.

По-нататъшното увеличение на наклона, под който е изстрелян снарядът, вече е свързано с увеличаване на необходимата начална скорост. Върхът на траекторията се доближава все повече до ординатната ос, височината (ординатата) му расте и в края на интервала, при α = 90°, началната скорост отново достига безкрайно голяма стойност ($v = \infty$), тъй като sin(2.90° – α) = sinα и знаменателят в (48,*a*) отново става нула. В този случай параболата се „свива”, т.е. двата ѝ клона се сливат в една безкрайна вертикална двойна отсечка, чиито връх е в безкрайност.

Този ход на зависимостта на $v$ от α гарантира, че за всяка $v > v_0$ съществуват два ъгъла, т.е. две траектории, които имат общо начало и се пресичат в мишената. Тази от тях, която в началната точка е по-стръмна, до мишената е разположена изцяло над другата.

И така, основният извод: При всеки избор на посоката на оръдието (т.е. при α = const от интервала (θ, 90°)) съществува единствена начална скорост $v$, определена от (47), при която траекторията на снаряда минава през мишената. (Както ще видим, обратното не е вярно.) До този извод стигнахме и въз основа на качествени разглеждания, но там остана открит въпросът за единственост на началната скорост. Благодарение на формула (48,*a*) сега положителният отговор на този въпрос става очевиден.

*Енигматична ситуация*

Интересно е, че в два случая – при двата гранични начални ъгла (α = θ и α = 90°), снарядът може да порази мишената, само ако е изстрелян с безкрайно голяма скорост. Случаите, обаче, се различават коренно един от друг. При единия (при α = θ) снарядът поразява мишената мигновено, защото скоростта му е безкрайна, а изминатото разстояние – крайно (стрелба с право мерене). За разлика от него, в другия случай (α = 90°), времето на полета до целта е безкрайно, защото при $v = \infty$, от формулата $0 = v - gt$ за крайната скорост при равнозакъснително движение следва, че дори само времето за издигане на снаряда е безкрайно ($t = \frac{\infty}{g}$). (А, на снаряда му предстои още и път надолу до мишената...!

Попадаме в ситуация, до голяма степен енигматична: два привидно аналогични случая (едно и също разположение на оръдието и целта, еднакви – безкрайно големи – начални скорости), а времената за полет на снаряда – коренно различни (нула и безкрайност). Кой е признакът, по който двата случая се различават и който обуславя тази разлика?

За да отговорим на този въпрос е необходимо да обърнем внимание не само на безкрайната **големина** на началната скорост, но и на нейните **компоненти**. Разликата е в това, че в единия случай (при $\alpha = \theta$) безкрайно големи са и двете компоненти на $\vec{v}$ ($v_x = \infty = v_y$, но $\frac{v_y}{v_x} = \tan\theta = \mathrm{const}$), докато в другия случай (при $\alpha = 90°$) хоризонталната компонента на началната скорост е нула – $v_x = 0$. Тъй като движението на снаряда в хоризонтална посока е равномерно, а във вертикална – равнозакъснително, в първия случай времето за изминаване на разстоянията $R\cos\theta$ и $R\sin\theta$, които са крайни, е наистина нула. Във втория случай, както бе отбелязано по-горе, от самия закон за скоростта следва, че на снаряда е необходимо безкрайно много време, за да стигне до целта.

Фактът, че при $\alpha = \theta$ времето за полет на снаряда е нула, а при $\alpha = 90°$ – безкрайност, може да послужи като основание за хипотезата, че при увеличаване на началния ъгъл от $\theta$ до $90°$ това време непрекъснато расте. Проверката на тази хипотеза обаче и извън целите на това разглеждане.

*Зависимост на началния ъгъл от началната скорост*

Зависимостта на началния ъгъл $\alpha$ от началната скорост $v$ се изразява с формула (48, *б*). Както вече знаем, мишена, посоката към която сключва ъгъл $\theta$ спрямо хоризонта, може да бъде поразена само от снаряд, чиято начална скорост удовлетворява неравенството $v \geq v_0$, където $v_0$ се определя от формула (16). При $v = v_0$ съществува единствен ъгъл $\alpha_0$, определен от формула (15), т.е. единствена траектория, минаваща през мишената. При $v > v_0$ решенията (48,*б*) са вече две, т.е. при такава начална скорост през мишената минават две траектории, едната с начален ъгъл, по-малък, другата – с по-голям от $\alpha_0$. От (48, *б*) следва още, че с увеличаване на $v$ расте и разликата $\alpha_1 - \alpha_2$ между двата начални ъгли, съответстващи на това $v$. В граничния случай $v \to \infty$ тази разлика достига максималната си стойност $(90° - \theta)$.

*Връзката решаване на задачи – формиране на математическа компетентност*

С разгледаната задача, с нейните решения и с коментарите към тях се илюстрират редица характерни за математическото мислене методи и прийоми.

– **Метод на моделирането**. В задачата и решенията се използва модел на един реален процес – артилерийската стрелба по неподвижна цел. В случая процесът се описва с идеализираните модели за тяло, като материална точка (и снарядът, и мишената), и за гравитационно поле – с модела на хомогенно силово поле. Оттук следват и ограниченията за валидността на модела: преди всичко това е пренебрегване на съпротивлението и на движението на въздуха – фактори, които влияят на посоката и големината на скоростта по време на полета на снаряда.

Макар да не е уговорено изрично, моделът включва и ограничение върху големината на началната скорост: тя трябва да бъде достатъчно малка, така че разстоянието между снаряда и оръдието да остава пренебрежимо малко спрямо радиуса на Земята. Това условие гарантира, че силовото поле, в което протича движението, е хомогенно (векторът на ускорението на свободно падане е константа).

Съществуват различни възможности за усъвършенстване на този най-груб модел, свързани с отчитане на някои от пренебрегваните фактори (което е свързано с използването на нови модели), но обикновено те се намират извън границите на училищната математика, а задачи от този тип на практика днес се решават от сложни компютърни програми.

– **Метод на хипотезите**. В първите две решения на задачата неявно (т.е. без изрично да посочваме), приложихме метода на хипотезите като средство за преход от частни случаи към общия случай. Наистина, и в двата случая използвахме знания за частните случаи $\theta = 0°$ и $\theta = 90°$: при първото решение използвахме известния отговор за $\alpha_0$, при второто – известния отговор за $v_0$. Въз основа на тези „стари" знания и привличайки в разсъжденията *съображения за простота*, изказахме *хипотези* относно общата зависимост на $\alpha_0$ и на $v_0$ от $\theta$. При това и в двата случая бе проверена достоверността на хипотезите.

Аналогично, само чрез преформулиране на вече известни знания за посоката на стрелбата в същите два частни случая, стигнахме до хипотезата, че при произволна посока към мишената, за да я поразим с минимална начална скорост, трябва да изстреляме снаряда по посока на ъглополвящата на ъгъла между вертикалата и тази посока.

Погледнато по-общо, може да се каже, че в тези случаи на прилагане на метода на хипотезите се открояват следните възлови моменти:

– Подбираме частни случаи, в които проблемът вече е решен.
– Преформулираме (ако е необходимо) резултатите от тези честни случаи така, че да бъдат еднотипни по форма.
– Използваме получената обща формулировка на въпросните резултати като основа на хипотезата, че тя, формулировката, е общовалидна.
– Проверяваме валидността на хипотезата.

В резултат от всичко това получаваме илюстрация на един конкретен за научния метод начин за получаване на нови знания.

– **Метод на екстремните случаи**. Когато се търсят зависимости между няколко величини, често е подходящо да се започне с разглеждане на частни случаи, в които някои от величините имат екстремни (напр. 0 или ∞) или гранични стойности. Това опростява картината и води до заключения, които помагат да се третира общият случай. Демонстрация на този факт е начинът, по който чрез качествени разсъждения доказахме съществуване на решение на задачата, както и намерихме отговора на въпроса колко траектории минават през една точка при $v > v_0$.

– **Метод на анализ на размерностите**. Този характерен за физиката метод позволи на качествено равнище да елиминираме зависимостта на $\alpha_0$ от $R$, което облекчи решаването на задачата и разкри едно съществено свойство на решението: че за простреляване с минимална начална скорост на снаряда на мишени, разположени на една и съща права с оръдието, не е необходимо да пренасочваме оръдието.

– **Съображения за простота**. Главна роля в първите две решения изиграха т.нар. *съображения за простота*, Не са един и два примерите, когато в науката физика, въпреки очевидната нееднозначност на изводите от такива съображения, важни физични проблеми са решавани с позоваване именно на съображения за простота. Ето защо, запознаването с подобен тип аргументация увеличава разнообразието от прийоми, характерни за физичния начин на мислене.

– **Съображения за непрекъснатост**. Този типично математически прийом бе използван както при качествените, така и при количествените разглеждания. С негова помощ доказахме съществуване на решение на задачата, върху кой клон на траекторията се намира мишена, поразена с минималната възможна начална скорост, както и колко траектории минават през мишената, когато началната скорост на снаряда е по-голяма от минималната. Показан бе и контрапример за случай, в който използването на съображения за непрекъснатост е неправомерно.

Всички изброени методи и прийоми са характерни за научното и по-специално – за математическото мислене и един поглед към предложените пет решения в такава светлина може да помогне за развиване на **математическа компетентност**.

*Връзката решаване на задачи – креативно мислене*

Друго подобно заключение може да се направи, като към петте решения се погледне от по-различен ъгъл. Ако е възможно четвъртото и петото решение да се разглеждат като конвенционални, то първите три очевидно нямат това качество, т.е. налице са *необичайни решения на стари задачи*. Освен това формулирането на обща задача въз основа на знания за частни случаи (преминаване от частното към общото), каквито случаи срещнахме неколкократно, представлява типичен пример за *откриване и решаване на нов проблем.*

Заслужава да се отбележи и специфичният начин, по който стигнахме до нов проблем в няколко случая. В началото използвахме знанията за максималната далечина, достигана от тяло, хвърлено в хоризонтална или във вертикална посока. След това преформулирахме резултатите (т.е. преобразувахме съответните формули във вид, позволяващ да им дадем ново тълкуване) и това позволи да стигнем до общия проблем за минималната начална скорост.

Малко по-сложен е пътят до втория проблем, формулиран във варианта на задачата. И в този случай става дума за преформулиране на стари знания, но тук е необходимо повече въображение, за да се осъзнае, че стрелбата по хоризонтална цел под ъгъл 45° е всъщност стрелба по посока на ъглополовящата на ъгъла между вертикалата и посоката към целта. Още по-голямо въображение е необходимо, за да се осъзнае, че същото твърдение е валидно и при вертикално разположена цел.

И именно тази възможност да изразим по единен начин резултатите за двата частни случая е основание за хипотезата, че минималната скорост се постига **винаги**, когато оръдието е насочено по ъглополовящата на ъгъла между вертикалата и посоката към целта.

От тази гледа точка двата случая са аналогични: във всеки от тях първо преформулираме по единен начин привидно различни резултати и това единство става основа за изказване хипотеза за общовалидност. Тези две констатации (необичайните решения и откриването на нов проблем) са съществени елементи на **креативното мислене**, качество на което е способността да се вижда проблем там, където други виждат само решение.

От изложеното дотук следва, че наистина за обогатяване на обратната страна на междупредметната връзка физика – математика и за стимулиране на развитието на креативно мислене не се изискват някакви кардинални програмни или методически промени. Резултат в тази посока може да се постигне, като при решаването на физични задачи не се ограничаваме с техническата страна (например как се преобразуват определени изрази, как се решава дадено уравнение и пр.), а се обърне повече внимание на по-общите въпроси, като, например, защо се предприема дадено действие, какви варианти има за постигане на определена цел и др., т.е. налага се наистина само пренареждане на акцентите при решаването на задачата.

*Какво може да използва учителят?*

Първото, което може да направи учителят, е, разбира се, да използва предлагания подход в индивидуалната работа с някой ученик: да го насочи към някое от предложените решения, да обсъди с него използваните прийоми от по-общата гледна точка, или, в края на краищата – просто да го запознае със самата разработка (едва ли има нужда от указания в тази насока), за да обсъдят заедно отделни моменти в нея..

Второ, въз основа на разгледаната задача е възможно да се формулират и решат редица по-сложни, но и по-интересни задачи. Може например да се зададат 3 – 4 вида различни по количество заряди (т.е. различни начални скорости) и да се търси с кой от тях е най-икономично да се порази целта (все пак сме в пазарна икономика!?). Друга посока на усложняване е наличието на някакво препятствие (стена, земно възвишение и др.) между оръдието и мишената и да се търси при какви условия (височината на препятствието и разстоянието му до оръдието) мишената може да бъде поразена и т.н. Полезно упражнение по математика може да бъде, например, намирането на уравнението на кривата, описана от върха на всички траектории на снаряди, минаващи през фиксирана мишена. Тази крива ще представлява количествено потвърждение на описания на качествено равнище вид на траектарията в зависимост от началния ъгъл.

Трето, ако учителят търси поле за по-творчески изяви, може да потърси нови решения на разгледаната задача; да открие нови образователни цели, постигането на които се улеснява от предложените решения; да открие и разработи по подобен начин задачи от други области на физиката; да открие нови, нетрадиционни цели, за постигане на които може да помогне решаването на физични задачи, и т.н.

Казано най-общо, от гледна точка на методиката на обучение, решаването на физични задачи е благодатна тематика, която може да заинтересува мнозина, особено ако се разглежда като част от по-общия проблем за възможностите чрез обучението по физика да се допринесе за придобиване на математическа компетентност.