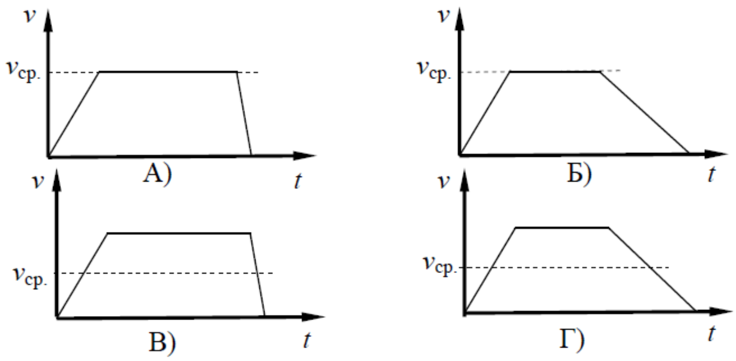
За решаването на задачи при
изучаване на неравномерни движения
(отново задача с продължения)

В общозадължителната подготовка по физика темата „Неравномерно движение” се изучава в 8. клас. Според учебната програма, ученикът трябва да може да характеризира движенията с величините средна и моментна скорост, както и в примери от транспорта да прилага изучените закони и да умее да разчита графиката на закона за скоростта. Проверка доколко са постигнати тези цели може да се направи примерно със следната задача от тестови тип:

Метровлак тръгва равноускорително, достига определена скорост, с която продължава движението си и, накрая, движейки се равнозакъснително, спира. Спирачното време е по-кратко от времето за ускоряване. Посочете коя от графиките на фиг. 1 правилно онагледява зависимостта на скоростта от времето и средната скорост, а в текста подчертайте думите, които правят вярно всяко от твърденията:



Фиг. 1.

Средната скорост на влака при движение между станциите е (по-голяма от, по-малка от, равна на) моментната му скорост в участъка, в който движението е равномерно. По целия път (има, няма) участъци, по които моментната скорост е по-малка от средната за цялото пътуване скорост. Средната скорост върху участъка, по който скоростта е постоянна, е (по-голяма от, по-малка от, равна на) средната скорост за цялото пътуване.

Правилният отговор на въпросите изисква ясно осъзнаване на принципната разлика между двете величини моментна скорост и средна скорост: докато първата е локална величина, т.е. величина, характеризираща движението в един определен момент или в определена точка от траекторият, средната скорост е глобална характеристика на движението, т.е. зависи от интервала време (или от участъка от траекторията), по който осредняваме. Така например освен за средна скорост по време на цялото пътуване, можем да говорим още за средна скорост по време на ускоряване (или спиране) на влака, за средна скорост по произволен избран от нас участък от пътя на влака и т.н. По същия начин, когато говорим за моментна скорост, винаги трябва да посочим скоростта в кой момент или в коя точка от траекторията имаме предвид.

Ако отговорите на тези въпроси са незадоволителни, за постигане на заложените в програмата образователни цели, може да спомогне решаването на следната задача:

Задача. *Разстоянието*[1] *между две съседни метростанции е L. Влак тръгва от едната с постоянно ускорение a^+, достига скорост v и продължава с нея до момента на задействане на спирачките, при което до следващата станция големината на ускорението му е постоянна и равна на a^-. Колко е времетраенето на цялото пътуване?*

Решение. Движението на влака включва три фази: равноускорително движение с начална скорост 0, равномерно – със скорост v и равнозакъснително – с крайна скорост 0. Тук се разглеждат два варианта на решение на задачата.

Първи вариант. Да означим с τ^+ продължителността на първата фаза, с τ – на втората и с τ^- – на третата фаза. Очевидно търсеното време T за движение между станциите е сбор от тези три времена:

(1) $$T = \tau^+ + \tau + \tau^-.$$

Разстоянието L между станциите е сума от пътищата, изминати по време на всяка от фазите, а съгласно с (1) – времето τ за равномерното движение е разлика от общото време T и времената за ускоряване и спиране на влака, т.е.:

(2) $$L = \frac{1}{2}a^+(\tau^+)^2 + v\tau + \frac{1}{2}a^-(\tau^-)^2 = \frac{v}{2}(\tau^+ + \tau^-) + v(T - \tau^+ - \tau^-) = vT - \frac{v^2}{2a^+} - \frac{v^2}{2a^-}.$$

(В преобразованията използваме факта, че пътищата и за първата, и за третата фаза на движение могат да се представят във вида $\frac{1}{2}a\tau^2 = \frac{1}{2}v\tau$.) Решението на (2) спрямо T е:

(3) $$T = \frac{L}{v} + v\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^+} + \frac{1}{a^-}\right).$$

Формула (3) фактически представлява отговор на задачата и работата по нея би могла да спре дотук. Физичният смисъл на зависимостта на T от зададените в условието величини, обаче, става по-прозрачен, а изразът в дясната строно на (3) – по-компактен, ако с помощта на формулата:

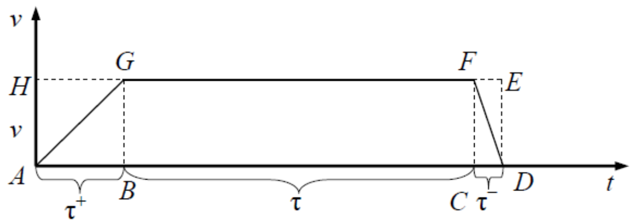
(4) $$\frac{1}{a} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^+} + \frac{1}{a^-}\right)$$

въведем величината a, която се нарича **средно хармонична**[2] на a^+ и a^-. С нейна помощ изразът за T придобива вида:

(5) $$T = \frac{L}{v} + \frac{v}{a},$$

който ще коментираме по-нататък.

Втори вариант. В случай, че учениците познават връзката между изминатия път и площта на фигурата, заградена от графиката на скоростта и абсцисната ос, решението на задачата може да се опре на графичния метод, като се използват познати от геометрията формули за лица на фигури. На фиг. 2 е показана графиката $AGFD$ на скоростта v на влака като функция на времето.



Фиг. 2.

[1] Тук и по-нататък терминът *разстояние* се използва не в геометричния му смисъл, а в неговия разговорен смисъл – като синоним на величината *изминат път*.

[2] За разлика от средно аритметичната стойност на две величини, която винаги е по-близка до по-голямата от тях, средно хармоничната е по-близка до по-малката. Ако едната величина е на порядъци по-голяма от другата, стойността на средната хармонична е от порядъка на по-малката.

Графичният метод гарантира, че $L = S_{ADFG}$, т.е. изминатият път L е равен на лицето на трапеца $ADFG$. Тъй като AG е диагонал в правоъгълника $ABGH$, а FD – диагонал в правоъгълника $CDEF$, лицата на триъгълниците ΔABG и ΔAGH са равни, както са равни и лицата на ΔCDF и ΔDEF. Следователно лицето на трапеца можем да изразим като разлика от лицето на правоъгълника $S_{ADEH} = vT$ и лицата $S_{AGH} = \frac{1}{2}\tau^{+}v = \frac{v^2}{2a^{+}}$ и $S_{DEF} = \frac{1}{2}\tau^{-}v = \frac{v^2}{2a^{-}}$ на триъгълниците ΔAGH и ΔDEF:

$$S_{ADFG} = S_{ADEH} - S_{AGH} - S_{DEF}.$$

Като заместим лицата със съответните изрази, решим уравнение спрямо T и използваме означението (4), получаваме, разбира се, формула (5).

От гледна точка на нагледност преимуществото е на страната на втория вариант, но, за съжаление, той излиза от рамките на общозадължителната подготовка по физика в 8. клас. Вариантът може да се използва или с ученици, които са изучавали физика в профилираната подготовка в 11. клас, или, в случай, че учителят работи индивидуално с осмокласници, проявяващи по-голям интерес към физиката – той трябва предварително да ги запознае с необходимата връзка площ–изминат път.

Продължения на решението. Независимо от варианта, по който е решена задачата, работата след получаване на отговора може да продължи в няколко направления и да се стигне до интересни резултати.

1. Първото продължение представлява коментар върху смисъла на двете събираеми в дясната страна на формула (5):

– Ако времената за ускоряване и спиране на влака са пренебрежимо малки спрямо общото време T (в идеалния случай – ако влакът се ускорява и спира мигновено, т.е. при $a^{+} = a^{-} = \infty$), вторият член в дясната страна на (5) отпада и в този случай $\frac{L}{v}$ е минималното време за пътуване със скорост v между станциите. Това например е случаят при междуселищно пътуване с влак, в който случай първата и третата фаза на движението са на порядъци по-кратки от втората.

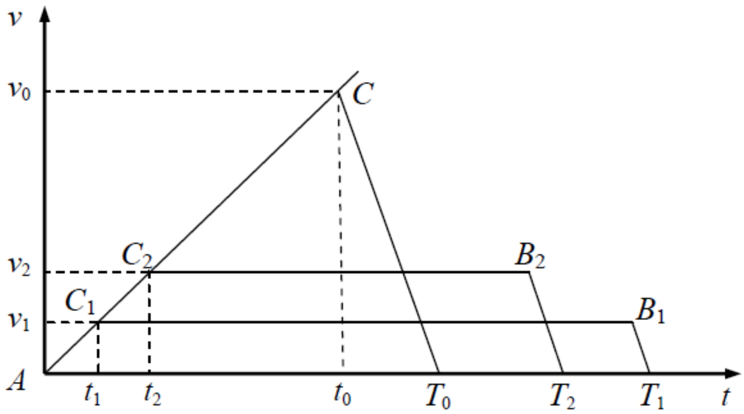
– Смисълът на втория член става по-ясен, ако с помощта на (4) се запише във вида:

$$\frac{v}{a} = \frac{v}{2a^{+}} + \frac{v}{2a^{-}} = \frac{\tau^{+}+\tau^{-}}{2}, \tag{6}$$

т.е. той представлява половината от общото времетраене на първата и третата фаза на пътуването. Присъствието във формула (5) на този член показва, че наличието на времената за ускоряване и спиране винаги удължава пътуването.

2. Привидно формула (5) води до следния парадоксален извод. Наистина, от нея би следвало, че ако влакът се ускорява по-продължително и скоростта v стане достатъчно голяма, първият член в дясната страна на (5) ще бъде пренебрежимо малък спрямо втория, чието поведение е противоположно – той расте с увеличаване на v. В този случай T се оказва правопропорционално на v, т.е. колкото по-голяма е скоростта на равномерното движение, толкова по-дълго е пътуването – извод, който явно противоречи на интуитивната представа за зависимост между скорост и времетраене на пътуване. Изясняването на ситуацията може да се осъществи по два начина.

Първият начин има качествен характер и по същество представлява продължение на използвания вече графичен метод. За целта с помощта на фиг. 3 проследяваме как се променя T при удължаване на първата фаза на движение. При това смятаме, че както ускорението a^+ в различните случаи е едно и също, така и ускорението a^- в различните случаи е едно и също. Това означава, че на графиките на скоростта, въпреки различните стойности на v, наклонът на страните на всеки трапец спрямо абсцисата не се променя.



Фиг. 3.

Според означенията на фиг. 3 при време за ускоряване t_1 скоростта на равномерното движение е v_1, а времетраенето на пътуването – T_1. Съгласно с графичния метод, пропътуваният път L е равен на лицето на трапеца $AT_1B_1C_1$, т.е. $L = S_{AT_1B_1C_1}$. Във втория случай времето за ускоряване е по-продължително отколкото в първия ($t_2 > t_1$) и съответно височината v_2 на трапеца $AT_2B_2C_2$ е по-голяма от тази на трапеца $AT_1B_1C_1$. И тъй като лицата на двата трапеца са еднакви (в двата случая разстоянието между станциите е едно и също!), основите на втория трапец са по-къси от тези на първия. Това означава, че $T_2 < T_1$ и $|B_2C_2| < |B_1C_1|$, т.е. както времетраенето на пътуването, така и продължителността на втората фаза са по-кратки.

Тези разсъждения водят до извод, че при по-голяма скрост v, времето за равномерно движение (както трябва и да се очаква!) е по-кратко. В съответствие с тази тенденция следва да заключим, че ако ускореното движение на влака продължи достатъчно дълго, ще настъпи момент t_0 (вж. фиг. 3), при който скоростта v_0 на влака е такава, че дължината на горната основа на трапеца става нула, т.е. графиката на скоростта и абсцисата вече заграждат не трапец, а триъгълник с лице L. На практика това означава, че в момента на достигане на скорост v_0 машинистът трябва да задейства спирачната система, защото в противен случай влакът ще подмине следващата станция. Влакът няма да може да спре на станцията и ако първата фаза се удължи още повече и скоростта му надмине v_0. Поради тази причина няма смисъл от разсъждиншя върху поведението на T за случая $v_0 < v$ (точно това е интервалът за скоростите, в който като че ли се появява парадоксът $T \sim v$), тъй като при фиксирано ускорение a^- влакът въобще няма да може да спре на станцията, към която приближава.

Причина за поява на привидния парадокс е заблуждаващият вид на формула (5), според който като че ли времето на пътуването зависи директно от скоростта v на равномерното движение. Самата скорост v обаче не е независим параметър – тя зависи от времето τ^+ за ускоряване на влака, а от същото това време зависи и интервалът време τ, през който движението е равномерно. По-продължителното ускоряване увеличава v, но същевременно то скъсява интервала τ, като решителна за поведението на T се оказва втората тенденция.

Вторият начин за изясняване на парадокса е количествен. Тъй като се предполага, че за учениците намирането на екстремум на функция не е позната операция, използването на този начин включва (за съжаление) елемент на досещане – досещането, че на формула (5) може да се придаде следния вид:

$$(7) \qquad T = \frac{L}{v} + \frac{v}{a} = \left(\sqrt{\frac{L}{v}} - \sqrt{\frac{v}{a}}\right)^2 + 2\sqrt{\frac{L}{a}}.$$

От него се вижда, че зависимостта на T от скоростта v се съдържа само в неотрицателното първо събираемо в дясната страна на (7). Когато скоростта v започне да расте от 0, това събираемо намалява и при някаква стойност v_0 става нула. Израз за v_0 намираме от условието $\left(\sqrt{\frac{L}{v_0}} - \sqrt{\frac{v_0}{a}}\right) = 0$, т.е.:

$$(8) \qquad v_0 = \sqrt{aL}.$$

При тази скорост във втората фаза на пътуването, неговата обща продължителност T_0 е минимална и съгласно със (7) зависи само от разстоянието между станциите и от средно хармоничното на двете ускорения:

$$(9) \qquad T_0 = 2\sqrt{\frac{L}{a}}.$$

За разкриване смисъла на скоростта v_0 пресмятаме продължителността τ на равномерното движение. От (1) и (9) получаваме:

$$\tau_0 = T_0 - \tau_0^+ - \tau_0^- = 2\sqrt{\frac{L}{a}} - \frac{v_0}{a^+} - \frac{v_0}{a^-} = \cdots = 0.$$

След този резултат трябва да повторим част от разсъжденията, направени при първия начин: щом при $v = v_0$ продължителността на втората фаза е нула, графиката на скоростта и абсцисата заграждат не трапец, а триъгълник. Това означава, че, за да успее да спре на втората станция, в момента, в който влакът достигане скорост v_0, машинистът трябва да задейства спирачната система. И, както и по-горе при качественото разглеждане, няма смисъл да се разсъждава върху поведението на T при по-големи скорости, защото при тях влакът непременно би подминал станцията.

Отново изводът е, че парадокс наистина няма.

2.1. Като допълнително предизвикателство може да се разгледа следният въпрос. Тъй като формула (5) дава определени реални и положителни стойности за T не само в интервала $0 < v \leq v_0$, но и за $v_0 \leq v$, може ли да се придаде някакъв смисъл на резултата за T, когато v е по-голямо от v_0?

3. Получените зависимости позволяват да отговорим на следния въпрос: как трябва да действа машинистът, така че влакът да измине разстоянието между станциите най-бързо? При това трябва да отчитаме, че от машиниста зависи само времетраенето τ^+ на първата фаза на пътуването, но не и максималните стойности на ускоренията a^+ и a^-, които се определят от техническите характеристики на двигателите и на спирачната система, т.е. на тях трябва да гледаме като на фиксирани величини. (При фиксирани L, a^+ и a^-, τ и на τ^- зависят само τ^+.)

За да отговорим на въпроса, трябва да отчетем още, че, от съображения за безопасност на движението, винаги съществува някаква максимално допустима скорост v_m на влака, която не зависи нито от ускоренията при тръгване и спиране, нито от разстоянието между станциите или от времето за пътуване. В зависимост от L и a са възможни два случая в зависимост от това, дали v_m е по-малка или по-голяма от v_0. В първия случай проблем с използване на формула (5) няма. Във втория случай обаче, машинистът трябва да отчита, че ако скоростта на влака надмине v_0, той не може да спре на следващата станция. Не е трудно да се съобрази кой от двата случая се реализира в действителност.

От формула (8) се вижда, че за разлика от v_m, освен от техническите характеристики на влака (чрез a), v_0 зависи и от разстоянието L между станциите. Тъй като $v_0 \sim \sqrt{L}$, при малки разстояния би трябвало да се реализира случаят $v_0 < v_m$ и, за да измине разстоянието между станциите най-бързо, щом достигне скорост v_0, машинистът следва да задейства спирачната система. Ако обаче $L > \frac{v_m^2}{a}$, действията на машиниста трябва да следват втория вариант ($v_m < v_0$), който доведе до формула (5): максимално бързо ускоряване до скорост v_m, колкото може по-дълго пътуване с тази скорост до момента, в който разстоянието до втората станция стане равно на спирачния път на влака – в този момент трябва да се включат спирачките.

3.1. Изводът, че при липса на ограничения за скоростта на влака и при фиксирани стойности на ускоренията a^+ и a^-, времето за пътуване е минимално, когато графиката на скоростта като функция на времето и абсцисата заграждат триъгълник (вж. фиг. 3), позволява да се разгледа следната качествена задача, която е свързана с друга, известна задача[3]:

Задача. *Когато метровлак тръгва с постоянно ускорение a^+ и спира с постоянно ускорение a^-, минималното време, за което може да измине разстоянието между две станции е T_0. Докажете, при всяка друга зависимост на скоростта от времето, при която влакът изминава това разстояние за същото време T_0, съществува поне един момент, в който ускорението е по-голямо от по-малката измежду величините a^+ и a^-. Скоростта на влака е непрекъсната функция на времето и неограничена по големина.*

Решение. Според досегашните разглеждания, щом движението на влака през първата и третата фаза е **равно**променливо и няма ограничения върху скоростта, минималното време за изминаване на определено разстояние се постига, когато графиката на зависимостта на скоростта от времето и абсцисата заграждат триъгълник. При това при по-големи ускорения a^+ и a^-, по-големи са и ъглите между бедрата на триъгълника и абсцисата. В този случай законът за скоростта има вид:

$$v = a^+t \quad \text{за} \quad 0 \le t \le t_0 \quad \text{и}$$
$$v = v_0 - a^-t \quad \text{за} \quad t_0 \le t \le T_0 .$$

Начупената отсечка ACT_0 на фиг. 3 представлява графичен израз на този закон.

Тъй като разстоянието между станциите е фиксирано, графиката на v при всеки друг закон за скоростта, който осигурява същата продължителност на пътуването (T_0), трябва да започва и завършва в началото и в края на основата на триъгълника, а площ-

[3] Вж. Ч. Тригг, *Задачи с изюминкой*, М., Мир, 1975, зад.237.

та, заградената от графиката и от абсцисната ос – равна на лицето на триъгълника. Това означава, че тази графика не може да лежи изцяло вътре в него и следователно съществува поне една точка (т.е. един момент), в която графиката пресича някое от бедрата на триъгълника. Тангентата към графиката в тази точка ще бъде по-стръмна от съответното бедро, което доказва съществуването на поне един момент, в който ускорението на влака е по-голямо от по-малкото ускорение на влак, движението на който при тръгване и при спиране е равнопроменливо.

3.2. От формула (5) може да се получи и друго, вече количествено следствие. Ако тя се запише във вид на квадратно уравнение за v:

(10) $$v^2 - aTv + aL = 0,$$

условието, което гарантира реалност на корените се изразява с неравенството:

$$a > 4\frac{L}{T^2}.$$

С други думи, ако когато движението е по схемата равноускорително – равномерно – равнозакъснително движение и влакът изминава разстояние L за време T, то средно хармоничната на ускоренията през първата и през третата фаза на движението трябва да превишава поне четирикратно отношението L/T^2. (Точно в този пункт е връзката със задачата от цитираната книга на Тригг.)

Лесно се доказва, че от двата корена на (10):

(11) $$v_{1,2} = \frac{1}{2}\left(aT \mp \sqrt{a^2T^2 - 4aL}\right)$$

физичен смисъл има само този, в който знакът пред квадратния радикал е отрицателен. Наистина, ако с другия корен пресметнем общото време ($\tau^+ + \tau^-$) на неравномерните движения и вземем предвид означението (4), ще получим, че ($\tau^+ + \tau^-$) > T, което, разбира се, е безсмислица.

С помощта на формулите (8) и (9) лесно се установява, че когато дискриминантата на (11) е нула попадаме точно на случая, когато графиката на скоростта загражда с абсцисата не трапец, а триъгълник – факт, който може да се разглежда и като проверка за вътрешната непротиворечивост на направените разглеждания.

4. Получените резултати са подходящи за решаване на различни практически задачи, даващи представа за реалните стойности на величините и за съотношението между средна и моментна скорост при движението на превозни средства. По-долу е представен един пример за подобна задача.

Задача. *Метровлак тръгва, достига определена скорост v, продължава с нея до момента, в който се задействат спирачките и така достига следващата станция. Кои величини може да измерим и какъв модел за движението на влака може да използваме, за да намерим скороста v?*

Тъй като се търси скорост, на практика трябва да можем да измерваме величините разстояние и време. Съществуват поне три начина за определяне на разстоянието L между станциите:

а) Често по трасето на метрото, на височина около метър над равнището на релсите, през 100 м са означени разстоянията до определена точка. Тъй като стойността на „най-малкото” деление на тази „скала” (100 м) е съизмерима с дължината на самата станция, голяма е вероятността такова означение да се открие във всяка от двете съседни станции. И, ако например в едната означението е „3,2 км", а в съседната –„2,5 км", очевидно разстоянието[4] между тях е L = 700 м.

б) Върху картата на София в Google Maps са обозначени местоположенията на всички метростанции. Измежду тях лесно може да се подберат две съседни, трасето между които е (почти) праволинейно. Тъй като мащабът на картата е указан, ако увеличим изображението максимално, но така, че станциите да останат на екрана на монитора, с помощта на линийка и по известния мащаб можем да определим L доста точно.

в) Има случаи, в които е известно, че трасето на метрото минава под някоя улица или булевард. В този случай (дори трасето да не е праволинейно) разстоянието между станциите може да се определи с помощта на някое приложение в смартфона от типа *крачкамер*, което след една разходка от едната до другата станции ще отчете L направо в метри.

Смартфонът може да се използва за определяне на разстоянието и ако в него е инсталирано някое от приложенията в от типа *компас*. То дава възможност с голяма точност[5] да се установят географските координати на метростанциите и с тяхна помощ, без да се напускат рамките на гимназиалната геометрия, да се пресметне L. Този метод обаче излишно насочва вниманието към математичната страна на въпроса.

Времеви интервали с достатъчно точно фиксирани краища се измерват удобно с хронометъра, с който разполагат смартфоните. Такава величина е например общото време T на пътуване между двете станции.

При известни две величини – L и T, единствен възможен модел за движението на влака е този на равномерното движение между станциите. Този модел позволява да намерим само средната скорост $\bar{v}$ на движението:

(12) $$\bar{v} = \frac{L}{T}.$$

Условието на задачата обаче изрично подчертава, че има участъци, по които движението на влака е неравномерно, а това означава, че използваният модел е твърде груб и $\bar{v}$ не може да се приеме за търсената скорост v.

За да се изгради по-точен модел, обаче, е необходима повече информация, каквато може да се получи само, ако се направят и допълнителни предположения. Най-просто е предположението, че при тръгване и при спиране движението на влака е равнопроменливо, т.е. с някакви постоянни ускорения, съответно a^{+} и a^{-}. (От условието на задачата е ясно, че между тези две фази движението е равномерно.) Този по-сложен модел се онагледява с графиката на фиг. 2.

За да бъде новият модел полезен, трябва да осигурим възможност за измерване и на други (освен L и T) величини – например за времената, през които влакът се движи неравномерно. С измервателен уред за тази цел вече разполагаме – хронометърът в смартфона, но проблем в случая е определянето на момента, в който свършва първата

---

[4] Разбира се, резултатът от това „измерване" включва определена грешка от порядъка на няколко десетки метра, защото означението в едната станция може да бъде в нейното начало, а на следващата – в нейния край, но не е трудно тази грешка да се намали съществено.

[5] Проблемът за точността на измерванията заслужава специално внимание от страна на учителя. Очевидно безсмислено е да се използва метод за измерване на разстояние, при който грешката е по-малка от метър, ако самата величина – разстоянието между станциите – е дефинирана с точност от порядък на десетина метра.

фаза (ускоряването) и на момента, в който започва третата фаза (спирането). За целта може да се използва фактът, че височината на звука от двигателите зависи от скоростта на движение на влака. Човешкото ухо доста точно разграничава случаите, когато тази височина е постоянна (и следователно движението – равномерно) от случаите, в които тя се повишава или намалява (т.е. движението е ускорително или закъснително). Следователно, с помощта на хронометъра можем да измерим времето τ^+ от момента на тръгване до момента, в който височината на звука от двигателите престане да се повишава, т.е. времето, през което влакът се ускорява. По подобен начин може да измерим и времето τ^- на закъснителното движение на влака.

В такъв случай вече разполагаме с четири измерими (известни) величини – разстоянието L и времената T, τ^+ и τ^-. В този слчай търсената скорост v може да се намери от формула (5), като за втория член в дясната ѝ страна използваме представянето (6):

(13) $$v = \frac{L}{T - \frac{1}{2}(\tau^+ + \tau^-)}.$$

Формула (13) допуска интересни следствия. Преди всичко, тъй като множителят $\frac{1}{1-\frac{\tau^+ + \tau^-}{2T}} > 1$, то $v > \bar{v}$, т.е. скоростта на равномерното движение е винаги по-голяма от средната скорост – факт, който би трябвало да бъде интуитивно ясен. Освен това, тъй като сумата от времето за ускоряване и времето за спиране не може да превишава общото време за пътуване (т.е. $\tau^+ + \tau^- \leq T$), скоростта на равномерното движение не може да надминава удвоената средна скорост. Равенството $v = 2\bar{v}$ се достига само в случай, че $\tau^+ + \tau^- = T$, т.е. когато интервалът време за равномерно движение е нула (случаят, в който при графичния метод трапецът се изражда в триъгълник).

Освен за пресмятане на v и сравняването ѝ с $\bar{v}$, получените „експериментални" данни за L, T, τ^+ и τ^- позволяват да се намерят и ускоренията на влака при тръгване и спиране – достатъчно е пресметнатата вече стойност на v да се замести във формулите $a^+ = \frac{v}{\tau^+}$ и $a^- = \frac{v}{\tau^-}$. Това, първо, би дало възможност получените стойности да се сравнят с някоя позната величина – например земното ускорение g, като по такъв начин се даде реална представа за ускоренията при движенията, които наблюдаваме около нас. Освен това, при наличие в смартфона на приложение от типа *акселерометър*, получените с него стойности на ускоренията може да се сравнят с действителните[6], което ще даде представа за точността на направените измервания.

Числен пример. Измерванията показват, че влакът изминава разстоянието между две станции на Софийското метро, разположени на разстояние $L = 1300$ m (определено по първия от описаните три начина), за време $T = 90$ s, като времената за ускоряване и спиране са приблизително равни – $\tau^+ = \tau^- = 15$ s.

Първата величина, която може да се пресметне от тези данни е средната скорост на влака между станциите:

$$\bar{v} = \frac{L}{T} = \frac{1300}{90} \approx 14{,}4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 52\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

Тъй като стойността на множителя, който във формула (13) е връзка между v и $\bar{v}$ в случая е:

---

[6] Повече подробности за работата на акселерометрите в смартфоните може да се намерят например на адрес Accelerometer Technical Note (sciencebuddies.org).

$$\frac{1}{1-\frac{\tau^{+}+\tau^{-}}{2T}}=\frac{1}{1-\frac{15+15}{2.90}}=1{,}2,$$

следва, че скоростта на равномерното движение на влака е v = 14,4.1,2 = 17,3 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ≈ 62,2 km/h.

От равенството между времената за ускоряване и спиране следва, че еднакви ще бъдат и ускоренията на влака в първата и третата фаза на движението, а според формула (4) – и средно хармоничната величина на двете ускорения, т.е.:

$$a=a^{+}=a^{-}=\frac{v}{\tau^{+}}=\frac{v}{\tau^{-}}=\frac{17{,}3}{15}\approx 1{,}15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

При такова ускорение, в съответствие с формула (9), влакът не би могъл да измине разстоянието между станциите за по-малко от:

$$T_0=2\sqrt{\frac{L}{a}}=2\sqrt{\frac{1300}{1{,}15}}\approx 67\ \mathrm{s},$$

при това максималната скорост, която би достигнал в момента на задействане на спирачките, съгласно с формула (8) е:

$$v_0=\sqrt{aL}=\sqrt{1{,}15.1300}\approx 38{,}7\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\approx 140\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

Най-вероятно техническите характеристики на трасето и на двигателите на влака не допускат движение с толкова голяма скорост, така че със сигурност графиката на скороста на влака в зависимост от времето има хоризонтална част.

Разбира се, ако се тръгне по тази линия, може да се направят подобни измервания и пресмятания за движението между други две съседни станции, като резултатите се съпоставят с първите и се обсъдят възможни причини за разликите между тях и т.н. Възможно е и да се направят неколкократни измервания между едни и същи две съседни станции, което ще даде възможност за оценяване на грешките и обсъждане причините, на които се дължат и на начините за тяхното намаляване.

Коментари. Предложената практическа задача допуска различни коментари.

Преди всичко, разсъждавайки върху движението на метровлаковете, използвахме моделите на равномерно и за равнопроменливо движения. Може да се отбележи, например, че при втория модел пътниците биха изпитали определен дискомфорт, изразяващ се в залитане назад или напред както в момента на тръгване, така и в момента на включване на спирачната система (особено при аварийно спиране!). Известно е, че на практика влакът тръгва и спира плавно, т.е. с постепенно **нарастващо** ускорение. Това означава, че двете страни на трапеца от фиг. 3 всъщност няма да бъдат отсечки, а части от някакви криви и този факт със сигурност ще се отрази върху количествените оценки. Това заключение отваря възможност за разсъждения в каква посока би била промяната на отношението $\bar{v}/v$ при непостоянни ускорения.

Второ, доколкото в условията на засилено дистанционно обучение (и по други, известни причини) изпълнението на предвидените в учебните програми лабораторни работи е силно затруднено, поставянето и решаването на подобни практически задачи е от особено значение за създаване у учениците на елементарни представи и изграждане на основни умения за измерване на физични величини и обработка на данни. В това отношение пред учителя се разкриват на практическа неограничени възможности (например за увеличаване на точността чрез повече от едно измерване, за търсене повече от един начин за определяне на дадена величина и мн.др.).

Трето, не бива да се създава впечатление, че задачи от разгледания тип са достъпни само за ученици, живеещи в близост да линии на метрото. В случая метровлаковете са избрани като пример само защото тяхното движение по принцип не се влияе от странични фактори (например от други участници в движението, от пресечки, от светофари и пр.). Като се спазва условието времето за движение между спирките да не е много по-голямо от времената за ускоряване и спиране, макар и по-трудно, би трябвало да бъде възможно подбиране на подходящи за задачата условия и при движението на наземния градския транспорт.

Четвърто, примерът с метровлаковете подсказва за много други възможности, които се дължат на факта, че семействата на много от учениците разполагат с лични автомобили. В автомобил ученикът лесно може да измерва разстояния (по километража), скорости (по положението на стрелката на скоростомера) и времеви интервали (с хронометъра в смартфона). Тези данни също могат да се използват за съставяне и решаване на разнообразни кинематични задачи.

Накрая, не трябва да се забравя, че в ядрото на учебното съдържание „Наблюдение, експеримент и изследване” на ДОИ за учебно съдържание по физика и астрономия фигурира изискване в края на гимназиалния етап на обучението ученикът да е придобил умения за използване на прости физични и математични модели за решаване на задачи. Разглежданата задача, нейните продължения и особено практическото ѝ решение биха спомогнали за разбиране на една същностна черта на метода на моделите – на необходимостта от обогатяването на първичната информация за усъвършенстване на един модел, за доближаването му до обекта, който се моделира.

Обсъжданите продължения на решението показват колко разнообразни възможности се разкриват пред един учител, който не се ограничава с получаване на отговор на дадена задача. Разбира се, за повечето такива продължения няма нито време, нито необходимост от използването им в класната работа. Те обаче могат да подпомогнат учители, които работят индивидуално с ученици, проявяващи засилен интерес към физиката и притежаващи необходимите способности да се занимават по-задълбочено с нея.