Защо и как да разкрием предизвикателствата, скрити в една стандартна задача

Христо Попов
Софийски университет „Св. Климент Охридски"
cpopov@phys.uni-sofia.bg

Абстракт: Апелира се за по-активна индивидуална работа с учениците, проявяващи интерес към природните науки. Решението на една физична задача от материала за 8. клас се използва за илюстрация на възможността за поддържане и развиване на този интерес чрез излизане от рамките на обикновената схема за решаване.

Във всяка гимназия, със сигурност не всяка година и не във всяка паралелка, се появяват ученици, чиито познавателни потребности остават незадоволени от равнището на общообразователната подготовка по физика. Това са бъдещи физици, инженери, лекари и въобще специалисти, спецификата на работата на които изисква задълбочени знания по физика и умения за тяхното практическо прилагане. Причините за това положение са комплексни и не на последно място сред тях е дефицитът на учебно време. Ако отчетем, че, първо, днес вероятността това време да се увеличи е нула, че, второ, масово в гимназиите в 8. – 10. клас не се изучава разширено физика, а в 11. и 12. клас тя не е профилиращ предмет и, трето, че в повечето случаи по обясними причини такъв ученик няма възможност да постъпи в школата на Теодоси Теодосиев, то, за да не го изгубим като бъдещ специалист, трябва да търсим други форми за задоволяване на неговите потребности. Една възможност в това отношение предоставя индивидуалната работа с ученика. (Тук и по-нататък терминът *ученик* се употребява само за такъв, притежаващ качествата и амбициите на потенциален участник в казанлъшката школа.)

За сега решаването на задачи в клас се използва предимно за затвърдяване на знанията и проверка и оценка на уменията за тяхното прилагане. За тези цели е достатъчна най-простата схема за решаване, която завършва с получаването на отговора. Ако тази схема се разтвори, съвкупността на постижимите образователни цели може да се обогати значително, като включи и засилване на интереса към физиката, и развиване на логическото мислене, и запознаване с методи на научното познание, и разнообразяване на междупредметните връзки, и ред други. При сегашните ограничения на учебното време, това нито е възможно при работата в клас, нито е необходимо на всички ученици. То обаче може да се окаже полезно при индивидуалната работа с онези, които бяха визирани по-горе.

Като пример за подобно излизане извън стандартната схема може да послужи решението на следната задача от материала за 8. клас:

Два платнохода К' и К" плават един срещу друг с постоянни скорости v' и v". Когато разстоянието между тях е s_0, от К' към К" със скорост v полита гълъб[1]*. След срещата с К" гълъбът, със същата скорост, се връща обратно, пресреща К', отново лети към К"и така снове между корабите до срещата им. Колко е изминатият от гълъба път L?*

В неявен вид условието на задачата предполага, че трите скорости изпълняват неравенствата $v' \le v$ и $v'' \le v$, т.е. гълъбът е по-бърз от корабите, защото в противен случай те ще се срещнат, преди той да се върне на *К*'.

Стандартното решение отчита, че времето *t* до срещата на корабите не зависи от движението на гълъба, т.е. условието преплита две елементарни задачи:

1. *След колко време t се срещат два кораба, които се намират на разстояние s_0 и се движат един срещу друг със скорости v'и v" съответно?*

Решението е почти очевидно: в момента на срещата сумата от пътищата на корабите е равна на началното разстояние ($v't + v''t = s_0$) и търсеното време е $t = s_0/(v'+v'')$.

2. *Какъв път L изминава за време $t = s_0/(v'+v'')$ гълъб, летящ със скорост v?*

Отговорът е също очевиден:

$$L = \frac{v}{v'+v''} s_0. \tag{1}$$

Какви продължения допуска задачата **след** получаване на отговора – в случая формула (1)? Отговорът зависи от това, в кой клас е ученикът, с който се работи.

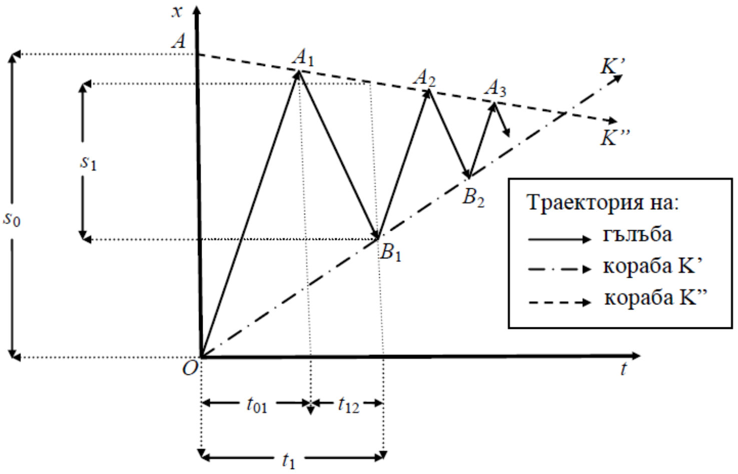
Вариант 1: Ученикът е в 8.–10. клас.

Преди всичко може да се постави въпросът за търсене на друго, нестандартно решение на задачата, например, като движението на гълъба се проследи в детайли. На фиг. 1. са показани траекториите на трите тела: корабът *К'* и гълъбът тръгват от т. *О*, а корабът *К"* – от т. *А*, отстояща на разстояние s_0 от т. *О*. Начупената линия OA_1B_1 представлява първи етап от полета на гълъба. В края на неговата първа част (момент t_{01}) гълъбът среща кораба *К"* (т. A_1), след което през втората част на етапа за време t_{12} се връща на *К'*. В края на първия етап, чието времетраене е $(t_{01} + t_{12})$, разстоянието между корабите е s_1. Вторият етап (начупената линия $B_1A_2B_2$) е подобен на първия, като различно е само началното разстояние между корабите. Така траекторията на гълъба се разделя на безброй еднотипни, постепенно скъсяващи се етапи.

Сумата от пътя vt_{01} на гълъба и пътя $v''t_{01}$ на *К"* през първата част OA_1 на първия етап, е равна на началното разстояние между корабите, т.е.:

$$s_0 = vt_{01} + v''t_{01}. \tag{2}$$

[1] В други версии на условието вместо кораби и гълъб участва муха, летяща между насрещно движещи се влакове. Разбира се, като поекзотичен този случай е и по-интригуващ, но той е нереален, защото, първо, мухата трудно би изпреварила влак и, второ, гълъбът е както по-бърз, така и по-издържлив в полет от мухата. (В една модерна версия на задачата вместо муха или гълъб би участвувал дрон.)



Фиг. 1 .

От (2) намираме времето до първата среща на гълъба с *K"*:

$$t_{01} = \frac{s_0}{v+v"}. \tag{3}$$

За това време корабът *K'* скъсява разстоянието до *K"* с $v't_{01} = \frac{v'}{v+v"}s_0$. Тъй като за същото време *K"* изминава разстояние $v"t_{01} = \frac{v"}{v+v"}s_0$, при обратния полет ситуацията е като началната, но разстоянието между корабите е не s_0, а:

$$s_0' = s_0 - v't_{01} - v"t_{01} = \frac{v-v'}{v+v"}s_0. \tag{4}$$

Следователно времето t_{12} за обратния полет на гълъба до *K'* и разстоянието s_1 между корабите в края на първия етап ще получим, като във формула (3) и (4) разменим местата на *v'* и *v"*, а s_0 заменим с s_0'. Така намираме:

$$t_{12} = \frac{s_0'}{v+v'} = \frac{v-v'}{(v+v')(v+v")}s_0 \tag{5}$$

$$s_1 = \frac{v-v"}{v+v'}s_0' = \frac{(v-v')(v-v")}{(v+v')(v+v")}s_0. \tag{6}$$

От (3) и (5) получаваме общото време t_1 за изминаване на първия етап:

$$t_1 = t_{01} + t_{12} = \frac{2v}{(v+v')(v+v")}s_0, \tag{7}$$

така че през първия етап общият път на гълъба е:

$$l_1 = vt_1 = \frac{2v^2}{(v+v')(v+v")}s_0. \tag{8}$$

Търсеният общ път *L* на гълъба е сума от дължините l_1, l_2, l_3 … на всички етапи. За по-голяма прегледност на следващите равенства е удобно да въведем два безразмерни параметъра *p* и *q*:

$$p = \frac{2v^2}{(v+v')(v+v")} \quad \text{и} \quad q = \frac{(v-v')(v-v")}{(v+v')(v+v")}. \tag{9}$$

С тяхна помощ формулите за времето t_1 (7), за пътя l_1 (8) и за разстоянието s_1 (6) се записват във вида:

$$t_1 = p\frac{s_0}{v}, \quad l_1 = ps_0 \quad \text{и} \quad s_1 = qs_0. \tag{10}$$

Тъй като етапите са еднотипни, изразите за пътя l_2 на гълъба и за разстоянието s_2 между корабите в края на втория етап записваме, като в съответните изрази от (10) заменим индексите „0" с „1" и „1" с „2":

$$l_2 = ps_1 = pqs_0 \quad и \quad s_2 = qs_1 = q^2s_0. \tag{11}$$

По същата логика изразите за величините след третия етап ще бъдат:

$$l_3 = ps_2 = pq^2s_0 \quad и \quad s_3 = qs_2 = q^3s_0\,,$$

и т.н., така че търсеният общ път *L* на гълъба е:

$$L = l_1 + l_2 + l_3 + \cdots = ps_0 + ps_0 q + ps_0 q^2 + ps_0 q^3 + \cdots. \tag{12}$$

Така стигаме до необходимостта да намерим сумата на безброй много величини – операция, която по математика все още не е изучавана. В случая обаче можем да се възползваме от факта, че всъщност знаем отговора – факт, който позволява да обърнем логиката на разсъжденията и да приравним десните страни на (1) и (12). По този начин ще направим „физичен” извод на математическа формула, която се изучава в профилираната подготовка по математика в 11. клас [1].

Следвайки този път, от (1) и (12), след отчитане на (9) получаваме:

$$ps_0 + ps_0 q + ps_0 q^2 + ps_0 q^3 + \cdots = ps_0 \frac{(v+v')(v+v'')}{2v(v'+v'')}. \tag{13}$$

С помощта на (9) дробта в дясната страна на (13) може да се представи във вида:

$$\frac{(v+v')(v+v'')}{2v(v'+v'')} = \frac{1}{\frac{2v(v'+v'')}{(v+v')(v+v'')}} = \frac{1}{1+\frac{2v(v'+v'')}{(v+v')(v+v'')}-1} = \cdots = \frac{1}{1-q} \tag{14}$$

и, след съкращаване на ps_0, от (13) получаваме търсената формула:

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \frac{1}{1-q}\,. \tag{15}$$

Сам по себе си този резултат е вече достатъчно впечатляващ: с помощта на една елементарна кинематична задача успяхме „да изведем” формулата за сума на безкрайна геометрична прогресия!

Разбира се, от математична гледна точка „изводът” на (15) има своите слаби страни. Преди всичко той не изяснява при какви условия е приложима формулата. (Пример за неприложимост: за сумата $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots$ формула (15) дава абсурдния резултат -1.)

Освен това при прехода от (13) към (15) съкратихме на ps_0 – операция, изискваща прилагане на правилото за изваждане на общ множител пред скоби. За сума от безброй много събираеми обаче това правило също невинаги е приложимо. Като пример отново може да послужи сумата $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots$. Ако я означим с x и приложим това правило, получаваме уравнение:

$$x = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots = 1 + 2(1 + 2 + 4 + \ldots) = 1 + 2x,$$

чието решение е отново абсурдът $x = -1$.

По същата логика, но значително по-лесно извод на (15) може да се направи като се използва апорията на Зенон за Ахил и костенурката [2], защото в този случай се разглежда движението на само две, а не както тук – на три тела.

Вижда се, че нестандартното решение предоставя на учителя разнообразни възможности за превръщане на задачата в предизвикателство за ученик от 8. – 10. клас. За целта е достатъчно да предложим на ученика първо да реши задачата по стандартния начин, след което да го насочим към нестандартното решение. Той би трябвало самостоятелно да стигне до изразите за l_1, l_2, l_3 …и до формула (12). След това, с помощта на учителя, по описания по-горе път трябва да направи прехода от (12) до (15). (Разбира се, математическите умения на ученика трябва да позволяват свободно боравене с изрази от типа на (14).)

С какво подобен начин на разсъждение може да учуди ученика, да събуди интереса му? Преди всичко с „откритието”, че е възможно сумата от безброй много положителни числа да бъде крайно число!

В обсъждането учителят следва чрез споменатите абсурди да обърне внимание на ограничената приложимост на формула (15). Едно очевидно необходимо условие за приложимостта ѝ е например събираемите в сумата да намаляват. Дали то е и достатъчно обаче ученикът, ще научи едва в часовете по математика в 11. клас. Подобни обсъждания безусловно спомагат за развитие на критичното мислене и обогатяват междупредметните връзки с математиката.

Фактът, че нестандартният извод на формула (15) не отговаря на ред въпроси има и своята положителна страна: той показва сложността на проблема и дава възможност на ученика сам да търси отговори. (Такъв например е въпросът защо в едни случаи формула (15) дава смислен резултат, а в други – безсмислен.)

Разгледаният пример показва, че без да използваме термини като безкрайна редица, граница, критерии за сходимост, дори без изобщо да говорим за геометрична прогресия, по най-елементарен начин можем да отворим едно малко прозорче, през което ученикът да надникне в необятния свят на математиката.

Вариант 2: Ученикът е в 11. – 12. клас.

В този случай ученикът познава материала от темата за числови редици в Модул 2 на Учебната програма за профилирана подготовка по математика [1] и във формула (12) разпознава, че става дума за сума на една безкрайна геометрична прогресия с начален член ps_0 и частно q. Чрез неравенствата $v' \leq v$ и $v'' \leq v$ и формулите (9) той проверява изпълнението на условието $0 < q < 1$ и по този нестандартен начин чрез познатата му формула (15) получава отново резултата (1).

Намирането на нестандартното решение, макар и доста по-трудоемко, и в този случай не е самоцелно. Какъв смисъл може да се вложи в него?

Първо, то потвърждава факта, че отговорът на задачата е *единствен* и не зависи от начина на решаване. С други думи потвърждава вътрешната съгласуваност на използваните зависимости, а това твърдение е вече познание от по-високо равнище, своеого рода метапознание.

Второ, нестандартното решение разкрива възможности за търсене отговори на въпроси, непреодолими за стандартното решение. Такъв например е въпросът колко курса ще направи гълъбът между корабите до срещата им в една реална ситуация, в която телата не се разглеждат като материални точки (вж. напр. [3], с. 363, [4]). За получаване на отговора са достатъчни знанията за логаритмичната функция, получени в часовете по математика [5]. Оказва се, че отговорът на този въпрос също е впечатляващ, защото ако скоростта на корабите е примерно 10 m/s, а на гълъба – 20 m/s, при начално разстояние между корабите 9 km, докато се сближат на 30 cm гълъбът ще направи само 4 – 5 курса, а за останалото време до окончателната среща (т.е. за части от секундата) броят на курсовете е безкрайно голям.

Трета възможност е с помощта на формули, получени в хода на решението да се търси отговор на въпроса за колко време гълъбът ще направи определен брой курсове (или обратно – колко курса ще направи за определено време).

Четвърта е възможността да се обсъди един въпрос, който всъщност няма отговор (или, в зависимост от предпочитанията, може да се таксува като неправомерен):

Ако в момента на срещата всяко от трите тела смени посоката на скоростта си на обратната, къде ще се окаже гълъбът, когато корабите се върнат в изходните си точки?

На пръв поглед във въпроса няма нищо особено – логиката подсказва, че щом корабите се върнат там, откъдето са тръгнали, в същия момент и гълъбът ще бъде върху кораба, от който е полетял. Оказва се обаче, че ситуацията е по-сложна: в която от двете посоки да се насочи гълъбът след срещата, той ще изпревари кораба, плаващ в тази посока, и изобщо няма как да стигне до другия кораб, за да се върне. Смяната на посоките на скоростите обаче е равнозначна на смяна на посоката на времето. Тогава възниква далеч по фундаментален проблем: наистина ли законите на механиката са инвариантни по отношение на обратимостта на времето? Този проблем е обсъждан многократно както във връзка са тази задача, така и за подобната ситуация, възникваща при движението на кораб към един от земните полюси по локсодрома (варианти на отговори може да се намерят например в [6] и [7]).

Пета възможност предоставя промяната на условието на задачата, като се разгледа случаят, в който корабите не се срещат, а се настигат и се търси формула, валидна и в двата случая. Възможно е да се анализира и най-общият случай на произволни посоки на скоростите на корабите, но в него разглежданията се усложняват от факта, че корабите могат да се срещнат само при определено съотношение между големините на техните скорости. В този случай траекторията на гълъба вече не е фиксирана, въпреки че изминатият от него път остава определен. Този вариант е подходящ за демонстриране на възможностите на графичния метод [2, с. 372].

От изложеното се вижда, че възможностите за продължаване на работата върху тази задача след получаване на отговора ѝ са многобройни и разнообразни. Сред тях са и търсенето на алтернативни решения, и обсъждане на следствията от отговора, и разглеждане на различни екстремални случаи, и поставяне на допълнителни въпроси, изоставяне на някои опростяващи допускания (напр. идеализации) и мн.др. Те подлежат на изследване и систематизиране.

По такъв начин, продължавайки работата по задачата след намиране на отговора ѝ, можем да я превърнем в малък изследователски проблем, проблем, който поставя пред ученика различни предизвикателства. Ясно е също така, че решението на не всяка задача допуска подобно развитие, но ако учителят прегледа задачите, с които работи, лесно ще открие сред тях подходящи за целта. Те несъмнено притежават голям потенциал за възбуждане на любопитството, за разпалване на въображението, за предизвикване на удивление с елегантността на използваните средства и/или с получените неочаквани резултати. А всичко това в крайна сметка допринася както за поддържане и развиване на интереса към физиката, така и за задоволяване на познавателните потребности на ученика.

В заключение искам отново да наблегна на необходимостта учителят по физика целенасочено да издирва талантливите ученици и им отделя по-голямо внимание чрез индивидуална работа с тях. Известно е, че докато работата с класа често води до разочарования, заниманията с тези ученици доставят на учителя емоционално удовлетворение и несъмнено представляват интелектуална инвестиция в бъдещето. За да се осъществи обаче едно такова преориентиране на част от вниманието от класната към индивидуалната форма на работа, е необходимо изпълнението на поне две условия: първо, физичната колегия следва да помогне организационно да се намерят начини за отчитане, поощряване и популяризиране на тази дейност на учителите, за да бъдат те мотивирани да отделят време и усилия за нея и, второ, специалистите по методика на обучението да помогнат на учителите с конкретни разработки за индивидуална работа с учениците.

Източници:

1. Учебна програма за профилирана подготовка по математика, mon.bg/bg/100598.
2. http://www.phys.uni-sofia.bg/~cpopov/Almanah-pdf/I chast/1 metodika/
3. elearning-phys.uni-sofia.bg/~cpopov/125+33 zadachi po fizika.pdf.
4. Попов Хр. Физични задачи – решения с продължения. Използване на графи след решаването на физи чна задача, Физика: Методология на обучението, 7, (2019), 34–46, http://physika-bg.org/.
5. Учебна програма по математика за 11. клас общообразователна подготовка, https://www.mon.bg/bg/100522
6. http://elearning-phys.uni-sofia.bg/~cpopov/Praktikum/zadachi_paradoksi.pdf.
7. **Гарднер М.** *Крестики–нолики*, М., „Мир”, 1988.