Земята пада върху Слънцето – тема с вариации

Разказват, че всеки ден, когато бъдещият Нобелов лауреат (1944 г.) Исак Раби се връщал от училище, майка му го посрещала не с въпроси от рода на: „Изпитваха ли те днес?", „Колко ти писаха?" или „Какво научи?", а го питала: „Днес успя ли да зададеш на учителя някакъв хубав въпрос?". Умението да се задават смислени и съществени въпроси също трябва да се изгражда в процеса на обучение – то е необходимо преди всичко на тези, на които предстои реализация в професия, свързана с природни науки, инженерство или медицина, но и далече не само на тях. Характерно в случая е, че търсенето и намирането на отговора на един въпрос обикновено поражда верига от нови въпроси, която, поне по принцип, няма край.

Цел на предложената работа е да покаже как, тръгвайки от една обикновена задача и задавайки подходящи въпроси, може да се разкрият разнообразни и с различна трудност възможности за работа с учениците, които имат изявен интерес към физиката. В [1] и [2] няколко примерни задачи от осмокласната кинематика се използват за илюстрация на възможностите за разширяване на кръга от цели на обучението при индивидуалната работа с един ученик, стига решението на задачата да продължи и след получаване на отговора ѝ, като се доведе до равнището на малък квазинаучен проблем. Подолу се развива същата идея, но се представя не като съвкупност от продължения на решението, а като поредица от повече или по-малко свързани помежду си въпроси.

Обект на „изследването" в случая е системата Слънце – Земя, а предмет – характерът на движението на Земята около неподвижното Слънце. Целта е да се установи как този характер зависи от енергията на системата = една зависимост, която на информативно–фактологическо равнище е застъпена и в досегашното учебно помагало по астрономия за 11. клас [7]. Разглеждането на движението в системата Земя – Слънце е тясно свързано с учебното съдържание, предвидено в последната Учебна програма по физика и астрономия (профилирана подготовка), Модул 1 „Движение и енергия", Тема 1.5 Гравитация [8], където се предвижда качествен и количествен анализ на движението на космически апарати.

Въпросната зависимост често се обсъжда на различни равнища в учебници и сборници с физични задачи, като пътищата за извеждането ѝ зависят от изходната точка и от използваните средства. В нашия случай изходна точка е едно специално начално състояние на системата, в което и двете тела са неподвижни, като до целта се достига с помощта на закона за запазване на енергията и законите на Кеплер, както и със съображения за непрекъснатост, които често (но неявно) се използват в разсъжденията. За удобство при индивидуалната работа с даден ученик пътят до целта е разделен на определен брой по-малки участъци, което представлява удобство, особено в случай на дистанционна връзка.

В разглеждания случай на неподвижни в началото тела поведението на системата е предсказуемо от физични съображения: щом началната скорост на Земята е $u_0 = 0$, под влияние на гравитацията тя започва да пада към Слънцето. Популярна задача представлява търсенето на времето τ, за което Земята ще падне на Слънцето. (В случай, че радиусът $R_З$ на Земята се пренебрегва, решението може да се намери в [3], зад. 1.241. Точното решение при $R_З \neq 0$ е представено в [4] и изисква използване на математичен апарат, излизащ извън рамките на елементарната математика.).

Тук разглеждането на проблема започва с негов качествен вариант.

Въпрос 1. *Можете ли без пресмятания да оцените времето, за което Земята би паднала върху Слънцето, ако изгуби орбиталната си скорост*?

Очевидно в случая са необходими съображения, водещи до **качествен** отговор на въпроса. По принцип е ясно например, че търсеното време не може да бъде по-кратко от 8 минути, защото 8 минути е времето, необходимо на светлината за измине разстоянието от Слънцето до Земята, докато Земята не може да се движи със скоростта на светлината. От друга страна, то не е възможно да бъде и от порядъка на милиарди години, тъй като възрастта на самата Вселена е величина от подобен порядък. Въпросът е как да се стесни максимално този широк интервал от минути до милиарди години.

До една по-определена оценка за τ може да се стигне чрез следните разсъждения. При движение по кръгова орбита с радиус $R = 150.10^9$ m около Слънцето Земята се движи равномерно и за време $T = 1$ година изминава път $2\pi R$. За да падне върху Слънцето, Земята трябва да измине път R, т.е. около 6 пъти по-кратък път ($2\pi \approx 6$). Началната скорост при падането е $u_0 = 0$, а движението е ускорително, при това не с постоянно, а с постоянно нарастващо ускорение (с приближаване към Слънцето силата на привличане расте!). Това предполага, че не е изключено в края на движението скоростта да надмине v – скоростта при кръговото орбитално движение. Ако приемем, че *средната* скорост при падането е колкото (или от порядъка на) v, то и времето на падане ще бъде около (или от порядъка на) 6 пъти по-кратко от една година, т.е. $\tau \sim T/6$.

Верността на тази оценка може да се потвърди или отхвърли само след количествено решаване на задачата.

Въпрос 2. *Как би намерил времето τ за падане на Земята върху Слънцето физик от 17. век, който знае само законите на Кеплер?*

Стандартното решение на задачата за намиране на τ използва първия и третия закон на Кеплер. Според третия закон ако T_1, a_1 и T_2, a_2 са съответно периодът и голямата полуос на две възможни орбити на една планета, то:

(1)
$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3}.$$

Според първия закон орбитата на Земята е елипса (в нашия опростен модел – окръжност), в един от фокусите на която се намира Слънцето. Траекторията на Земята при падането ѝ пък представлява отсечка с дължина R, която (тук е съществения момент!) може да разглеждаме като частен случай на безкрайно сплесната елипса с голяма полуос $R/2$, т.е. елипса с нулева малка полуос, по която Земята „обикаля” с период 2τ. Прилагането на третия закон за кръговата орбита и за орбитата – двойна „отсечка” води до уравнението:

(2)
$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{(2\tau)^2}{\left(\frac{R}{2}\right)^3},$$

чието решение е:

(3)
$$\tau = \frac{1}{4\sqrt{2}}T.$$

Тъй като $T \approx 365$ дни, от (3) следва, че ако загуби орбиталната си скорост, Земята би паднала върху Слънцето за $\tau \approx 64{,}5$ дни, т.е. за малко повече от 2 месеца. (Точното решение, което отчита размерите на Земята, се различава от тази стойност в третия знак след десетичната точка [4].)

Фактът, че времето за падане не зависи в **явен** вид нито от масите на телата, нито от разстоянието между тях, а само от продължителността на годината при движение по кръгова орбита гарантира, че формула (3) определя по порядък и времето, за което Луната би паднала върху Земята ако загуби орбиталната си скорост, и съответното време за падане на Юпитер върху Слънцето, и изобщо времето за падане на всеки спътник, който обикаля по кръгова орбита около небесно тяло за време T. За целта е достатъчно само да умножим продължителността на годината на спътника с $\frac{1}{4\sqrt{2}} \approx 0{,}176$, т.е. търсеното време е около 1/5 от съответната „година”.

Въпрос 3. *Колко е разликата между отговорите на първите два въпроса?*

Всъщност и в двата случая се търси една и съща величина – τ, но средствата за намирането ѝ са различни. И в двете решения отговорът е изразен като част от продължителността T на годината, а разликата е само в множителя пред T. В качествения отговор този множител е $\frac{1}{6} \approx \frac{1}{2\pi} \approx 0{,}159$, докато законите на Кеплер дават за него стойност $\frac{1}{4\sqrt{2}} \approx 0{,}176$. Разликата между двете величини е под 10 %. Този факт сам по себе си е удивителен, като се имат предвид грубите съображения, от които получихме оценката 1/6. Това показва, че абсолютно необоснованото предположение за приблизителното равенство между орбиталната скорост на Земята и средната скорост на евентуалното ѝ падане върху Слънцето неочаквано се оказва близко до истината.

Въпрос 4. *Как би намерил времето τ за падане на Земята върху Слънцето физик, който знае законите на класическата механика?*

В този случай отговорът предполага търсене на зависимостта на τ от масата на Слънцето (M = 1,99.10^{30} kg) и масата m на Земята, от силата на взаимодействие между тях и от началното състояние на системата. Като имаме предвид вече намерения отговор на въпрос 2. (формула (3)), остава да припомним от кои величини и как T зависи от тях. За целта използваме, че при движение по **кръгова** орбита необходимата центростремителна сила ($\frac{mv^2}{R}$) се осигурява от гравитационното привличане ($G\frac{mM}{R^2}$), т.е.:

(4) $$\frac{mv^2}{R} = G\frac{mM}{R^2},$$

където G = 6,67.10^{-11} m^3.kg^{-1}s^{-1} е гравитационната константа. От (4) за орбиталната скорост на Земята получаваме познатата формула:

(5) $$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}.$$

Тъй като пътят vT, изминат от Земята с тази скорост за една година, е $2\pi R$, продължителността на годината е:

(6) $$T = 2\pi R\sqrt{\frac{R}{GM}}.$$

От (3) и (6) следва, че времето за падане на Земята върху Слънцето е:

(7) $$\tau = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}R\sqrt{\frac{R}{GM}}.$$

Независимостта на τ от масата на Земята е следствие от факта, че движението ѝ се определя от уравнението $ma = F = G\frac{mM}{r^2}$, в което m фигурира като множител и в лявата, и в дясната страна, поради което се съкращава.

Познаването на формула (7) позволява да изразим и средната скорост на Земята при падането ѝ върху Слънцето. Тъй като изминатият път е R то:

$$\bar{v} = \frac{R}{\tau} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{\frac{GM}{R}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}v = 0{,}90v.$$

Разбира се, това е същата 10 % разлика, която бе установена и при отговора на въпрос 3.

Въпрос 4.1. *По какво си приличат и по какво се различават движенията на небесните тела и движенията на разноименните електрични заряди?*

Приликата е очевидна: и в двата случая действащата сила на привличане е обратно пропорционална на квадрата от разстоянието между телата. Принципната разлика е в това, че докато гравитационната сила е пропорционална на масите, кулоновата сила е пропорционална на зарядите на телата. (Разбира се, не по-малко принципно е различието, че движението на зарядите поражда и магнитни сили, но тук те се пренебрегват.) Поради това вече в случая на електрични сили в уравнението на движение ($ma =$

$\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$) масата m на движещото се тяло не се съкращава и от нея зависи както законът за движение, така и всички свързани с него величини.

Тази аналогия позволява редица резултати за движенията на гравитиращи тела да се прехвърлят автоматично за случая на електрични заряди [6] (стига, разбира се ситуацията да не налага отчитането на магнитни сили).

Въпрос 5. *Всъщност приложима ли е класическата механика за случая на падаща към Слънцето Земя?*

Този въпрос възниква, тъй като при качественото разглеждане на движението на Земята към Слънцето бе отбелязано, че скоростта ѝ нараства с приближаване към него. В стандартното решение използвахме третия закон на Кеплер, който е изпълнен в рамките на Нютоновата механика, т.е. при скорости, достатъчно малки в сравнение със скоростта на светлината c във вакуум. Какво би се променило, ако приближавайки Слънцето, скоростта v на Земята стане сравнима със c? Първото, за което се досещаме, е, че с увеличаване на скоростта се увеличава и масата на движещото се тяло ($m(v) = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$). Това би забавило нейното ускоряване, т.е. – би удължило времето на падане. Освен това, ако m нарасне дотолкова, че стане сравнимо с M, цялата постановка на решението губи валидност, т.е. не е възможно повече да разглеждаме Слънцето като неподвижно. Този ефект от своя страна би скъсил и пътя, който трябва да измине Земята, и времето до срещата. Съществен става и въпросът от чия гледна точка отчитаме времето: от гледна точка на човек, който пада заедно със Земята, от гледна точка на наблюдател, свързан със Слънцето, или от човек, намиращ се например на Марс? С други думи вместо задача на класическата механика ще трябва да решаваме проблем на специалната теория на относителността (СТО).

За да преценим кой случай се осъществява, пресмятаме по класическия начин скоростта на Земята, когато достигне повърхността на Слънцето, и я сравняваме със скоростта на светлината. При това, тъй като радиусът на Земята е над 100 пъти по-малък от радиуса на Слънцето ($R_\odot = 7.10^8$ m), с точност, по-добра от 1 % разглеждаме Земята като материална точка.

Оценка за скоростта на Земята в момента, когато достигне повърхността на Слънцето, следва от закона за запазване на пълната механична енергия на системата Земя – Слънце. Тъй като в началното състояние двете тела са неподвижни, енергията на системата е равна на гравитационната потенциална енергия:

(8) $$E_0 = -G\frac{mM}{R}.$$

Ако означим с u_{max} скоростта, с която Земята достига повърхността на Слънцето, в това крайно състояние механичната енергия на системата е:

(9) $$E = \frac{mu_{max}^2}{2} - G\frac{mM}{R_\odot}.$$

Законът за запазване на енергията гарантира равенство между десните части на (8) и (9), от което определяме, че:

(10) $$u_{\max} = \sqrt{2GM\left(\frac{1}{R_\odot} - \frac{1}{R}\right)} \quad .$$

Тъй като $R_\odot << R$, вторият член в скобата под корена се пренебрегва (при това грешката, която правим, е по-малка от грешката от допускането, че Земята е материална точка). Така, като използваме (5), за скоростта с която Земята достига повърхността на Слънцето, получаваме израза:

(11) $$u_{\max} \approx \sqrt{2\frac{GM}{R_\odot}} = v\sqrt{2\frac{R}{R_\odot}}.$$

Като заместим в (7) стойностите на величините, за интересуващата ни скорост получаваме $u_{max} \approx 6{,}16.10^5$ m/s ≈ 600 km/s[1]. При това положение отношението u_{max}/c се оказва от порядъка на 10^{-3}, а квадратът му, който е съществен за определяне на това дали трябва да се отчитат релативистични ефекти – от порядъка на 10^{-6}. Това показва, че в случая използването на Нютоновата механика е напълно оправдано, тъй като СТО би внесла поправки, на порядъци по-малки от грешката, която правим, пренебрегвайки размерите на Земята спрямо тези на Слънцето.

Въпрос 5.1. *Ще остане ли валидна формула (3), ако Слънцето е неутронна звезда?*

Тъй като диаметрите на неутронните звезди са от порядъка на 10–15 km, да разгледаме случая, в който радиусът на Слънцето е $R_{\Theta} = 5$ km. Сега не Земята, а Слънцето следва да разглеждаме като материална точка, защото неговият радиус е повече от 100 пъти по-малък от земния радиус $R_З = 6{,}37.10^6$ m . При това положение контактът между двете тела се осъществява при разстояние между центровете им не R_{Θ}, а при $R_З$ и от формула (11) получаваме, че при удара Земята би имала скорост $v_{max} \approx 6{,}5.10^6$ m/s. Тази стойност е малко повече от 2 % от скоростта на светлината във вакуум, така че релативистичните ефекти, които са квадратични спрямо v_{max}/c , и в този случай може да се пренебрегнат, т.е. формула (3) запазва валидността си, макар грешката да бъде по-голяма, отколкото в случая на Слънце с реални размери.

Доколкото решаването на една задача по повече от един начин е винаги полезно, на ученика може да се предложи да опита да реши задачата например по метода на размерностите. За целта той трябва първо да се запознае с основите на този метод, като направи справка за него в подходящ източник (вж. например [2], задача 19).

Въпрос 6. *Възможно ли е да се оцени времето за падане на Земята върху Слънцето с помощта на метода на размерностите?*

Този метод изисква първо да се определи от кои величини би могла да зависи търсеното време. В случая неговата размерност е $[\tau] = T$. В задачата се разглежда система от две тела (Земя и Слънце) с маси съответно m *и* M, които се привличат с гравитационна сила, подчиняваща се на закона на Нютон. В отправна система с координатно начало в центъра на Слънцето началното състояние на системата се характеризира с разстоянието между телата R и началната скорост на Земята (в случая – нула). Следователно τ може да зависи от M, m, R и, разбира се, от гравитационната константа G, която фигурира в закона на Нютон.

Със същите аргументи, използвани в отговора на въпрос 4, и сега отхвърляме зависимостта на τ от m. Освен това, M и G фигурират в уравнението на движение не поотделно, а само в комбинацията GM, което позволява да запишем търсената зависимост във вида:

(12) $$\tau = kR^{\alpha}(GM)^{\beta},$$

където k, α и β са подлежащи на определяне безразмерни константи.

При това положение от (12) за размерностите на величините получаваме равенството:

(13) $$[\tau] = [R]^{\alpha}[GM]^{\beta}.$$

Като отчетем, че съответните размерности на величините са: $[\tau] = T$, $[R] = L$, $[M] = M$ и $[G] = L^3M^{-1}T^{-2}$, от (13) получаваме уравнението:

[1] Тази стойност е например 20 пъти по-голяма от орбиталната скорост на Земята v. Този резултат не противоречи на установеното по-рано съотношение $\bar{v} \approx 0{,}9v$, защото при движение с променливо ускорение средната скорост се намира чрез пресмятане на интеграл, т.е. не е полусбор от началната и крайната скорост, както при **равнопроменливи** движения! С други думи в нашия случай $\bar{v} \neq \frac{0+20}{2}v$.

(14) $$T^1 = L^\alpha \, (L^3 \, T^{-2})^\beta.$$

Като приравним степенните показатели на T и L от лявата и от дясната страна на (14), получаваме система от две линейни уравнения за α и β, чието решение е:

$$\alpha = 3/2, \quad \beta = -1/2 .$$

Заместването на тези стойности в (12), води до следния резултат:

(15) $$\tau = kR\sqrt{\frac{R}{MG}}.$$

Основа на метода на размерностите е предположението, че k ≈ 1. То се основава на факта,че във физичните закони не участват безразмерни множители с много големи или с много малки стойности, поради което и в зависимостите между величините, свързани с тези закони, няма от къде да се получат безразмерни коефициенти от подобни стойности. С това предположение стигаме до израза:

(16) $$\tau' \approx R\sqrt{\frac{R}{MG}}.$$

За да оценим приложимостта на метода на размерностите в случая, трябва да заместим в (16) известните стойности на величините, да пресметнем τ' и да го сравним със стойността на τ, получена от (3). Резултатът от тези действия е:

(17) $$\tau' \approx 5\,040\,000 \text{ s} \approx 58{,}3 \text{ дни}.$$

Като сравним със стойността, получена в стандартното решение (64,5 дни), виждаме, че методът на размерностите дава не само порядъка на търсената величина, но и нейната стойност с грешка, по-малка от 10 %. (Странното в случая е, че грешката на най-грубата, качествената оценка е още по-малка – само 5 %!)

Дотук разглеждахме две състояния на системата Слънце – Земя. Общото при тях е, че и при двете началното разстояние между телата е R, а посоката на началната скорост $\vec{u}_0$ на Земята е перпендикулярна на посоката към Слънцето. Разликата е в големината на началната скорост: в единия случай $u_0 = 0$ и Земята пада свободно към Слънцето, т.е. орбитата ѝ е двойна отсечка, а в другия – $u_0 = v$ (вж. (5)) и орбитата е окръжност.

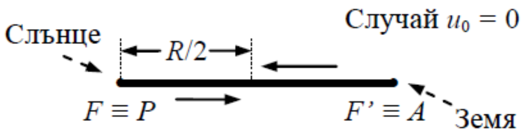
С цел подготовка за разглеждане на един по-сложен случай, първо ще отговорим на следния качествен въпрос.

Въпрос 7. *Как големината u_0 на началната скорост на Земята влияе върху вида на орбитата ѝ, ако в началния момент разстоянието до Слънцето е R, а посоката на $\vec{u}_0$ е перпендикулярна на посоката към Слънцето?*

Видът на орбитата се определя от първия закон на Кеплер: елипса, в единия фокус F на която се намира Слънцето. При движение по елипса орбиталната скорост е перпендикулярна на посоката към Слънцето само в перихелия (т. P) и в афелия (т. A), а вторият фокус F' лежи върху отсечката, свързваща т. A и т. P.

Понеже по условие началната скорост $\vec{u}_0$ е перпендикулярна на посоката към Слънцето, то началната точка, от която започва движението на Земята, е със сигурност или перихелий, или афелий, а голямата полуос на елипсата лежи върху правата, съединяваща Слънцето с началното положение на Земята.

Вече коментирахме вида на елипсата в случая $u_0 = 0$ – тя е двойна отсечка с дължина R. Фокусите на такава „елипса” се намират в краищата на отсечката, като F (фокусът, в който е Слънцето) съвпада с перихелия, а другият фокус, F', съвпада с афелия (положението на Земята в началото). При това положение голямата **полу**ос на „елипсата” е $R/2$, а разстоянията $d_п$ от Слънцето до перихелия и $d_а$ – от Слънцето до афелия са съответно $d_п = 0$ и $d_а = R$ (фиг. 1).

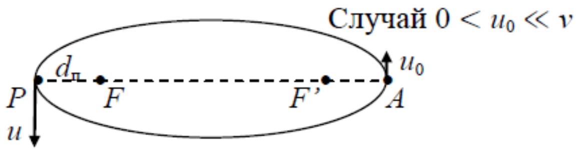


Фиг. 1

В този случай пълната механична енергия на системата е минимална (Земята в началния момент е неподвижна!) и равна на:

(18) $$E_{min} = -G\frac{mM}{R}.$$

Нека сега $0 \neq u_0 \ll v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$. От първия закон на Кеплер и от съображения за непрекъснатост следва, че в този случай орбитата е силно сплесната елипса, чиито фокус F отново съвпада с центъра на Слънцето, а вторият фокус F' е отместен към F (фиг. 2). Сега вече е ясно, че началното положение на Земята (т. A) е афелий, докато перихелият (т. P) се е преместил от F в същата посока и на същото разстояние d, както F' по отношение на A.



Фиг. 2

Интересуващият ни вид на орбитата се характеризира с разстоянието $|FF'|$ между фокусите, което е свързано с разстоянието $d_п = |PF|$ от Слънцето до перихелия (фиг. 2). Всички тези разстояния, както и скоростта u на Земята в т. P са подлежащи на определяне функции на началните разстояние R и скорост u_0. За намирането им използваме законите за запазване на енергията и на момента на импулса (в случая последният е еивалентен на втория закон на Кеплер):

(19) $$\frac{mu^2}{2} - G\frac{mM}{d_п} = \frac{mu_0^2}{2} - G\frac{mM}{R},$$

(20) $$mud_п = mRu_0.$$

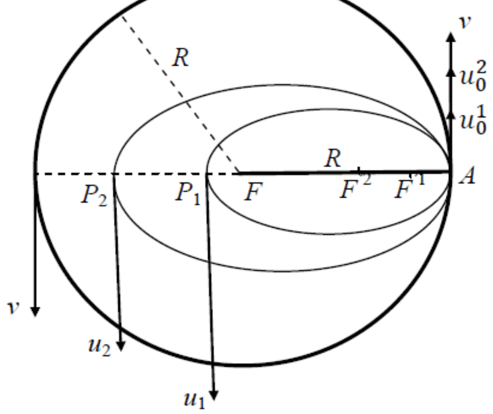
За по-удобно коментиране на решението на тази система е подходящо вместо G, M и R, като параметър да въведем тяхната комбинация $v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ (скоростта на Земята при движението ѝ по кръгова орбита). С помощта на този параметър решението има вида:

(21) $$u = \frac{2v^2 - u_0^2}{u_0} \quad \text{и} \quad d_п = \frac{u_0^2}{2v^2 - u_0^2}R.$$

От втората от формулите (21) може да пресметнем и разстоянието $|FF'|$ между фокусите на елипсата:

(22) $$|FF'| = R - d_п = 2\frac{v^2 - u_0^2}{2v^2 - u_0^2}R.$$

В съответствие с формули (21) и (22) на фиг. 3 е показан видът на траекторията на Земята за четири стойности на началната скорост от интервала $(0, v)$ – $0 < u_0^1 < u_0^2 < v$. И в четирите случая са фиксирани фокусът т. F, в който е Слънцето, и афелият т. A, откъдето започва движението на Земята. Вижда се, че с увеличаване на началната скорост u_0 перихелият P и фокусът F' се изместват в посока от т. A към т. F , като разстоянията $|PF| = |F'A|$ растат от 0 до R, а разстоянието$|FF'|$ се променя от R до 0. При това голямата полуос на елипсата расте от $R/2$ до R, а скоростта u на Земята в перихелия намалява от в интервала (∞, v).



Фиг. 3

Въпрос 7.1. *Каква е минималната начална скорост на Земята, при която орбитата ѝ все още не прониква в Слънцето? (Разбира се, при досегашното условие за посоката тази скорост*.)

Отговорът на въпроса се определя от втората формула (21): земната орбита тангира повърхността на Слънцето[2], при условие че разстоянието между центъра на Слънцето и перихелия стане равно на слънчевия радиус, т.е. при $d_п = R_\odot$,. В този случай с точност до членове от порядък $(R_\odot/ R)^2$ за търсената минимална скорост от (21) получаваме:

(23) $$u_{0\min} = v\sqrt{\frac{R_\odot}{R}}.$$

При начална скорост, по-малка от $u_{0\min}$, орбитата пресича Слънцето. Когато $u_0 = u_{0\min}$, според първата от формулите (21) скоростта на Земята в перихелия е:

(24) $$u_{\max} = v\sqrt{2\frac{R}{R_\odot}} = \sqrt{2\frac{GM}{R_\odot}},$$

а в последната равенство сме използвали формула (5). т.е. при използваната точност – от същия порядък, като скоростта, с която Земята достига Слънцето при директно падане (формула (11)).

Въпрос 7.1.1. *При какъв радиус на Слънцето би трябвало проблемът за падане на Земята върху него да се решава с отчитане на релативистични ефекти*?

Релативистични ефекти трябва да се отчитат, когато скоростта на Земята стане сравнима със скоростта c на светлината във вакуум. В нашия случай скоростта на Земята е максимална в перихелия, затова отговорът се определя от формула (24) при $u_{\max} \sim c$. Ако заместим в лявата страна на формулата $u_{\max}$ със c и решим полученото равенство спрямо $R_\odot$, получаваме:

(25) $$R_\odot = \sqrt{2\frac{GM}{c^2}},$$

а това, по определение, е точно радиусът на Шварцшилд на Слънцето [7].

По този начин ситуацията се оказва в известен смисъл парадоксална: ако радиусът на Слънцето е от порядъка или по-малък от неговия радиус на Шварцшилд, Нютоновата механика е неприложима в два случая на начални условия: и когато началната скорост на Земята е много голяма (близка до c, което е естествено), и когато е достатъчно малка (спрямо v, определено от (23)).

[2] Абстрахираме се от всякакви усложнения, които биха произлезли от толкова близкото разстояние между Земята и Слънцето, включително например от факта, че поне част от Земята би се изпарила от високата температура и би трябвало да отчитаме намаляването на масата ѝ.

С оглед нуждите на следващите разглеждания ще проследим и промяната на енергията E на системата при нарастване на u_0 от 0 до v. При $u_0 = 0$ енергията има минимална стойност (вж. (8)):

$$E_{\min} = -G\frac{mM}{R}.$$

С помощта на формула (5) пресмятаме, че при начална скорост на Земята v, енергията на системата е:

$$E = -G\frac{mM}{R} + \frac{mv^2}{2} = -G\frac{mM}{2R}. \tag{26}$$

Следователно когато увеличаваме началната скорост на Земята от 0 до v, гравитационната енергия на системата Слънце – Земя нараства от $-G\frac{mM}{R}$ до $-G\frac{mM}{2R}$.

Въпрос 7.2. *Как се променя видът на траекторията на Земята, когато началната ѝ скорост u_0 стане по-голяма от v?*

Отговор на този въпрос трябва да търсим отново във формули (21) и (22) – тъй като при извода им никъде не използвахме ограничение $u_0 \leq v$, би следвало те да запазят валидността си и при $u_0 \geq v$. Това със сигурност би следвало да важи поне в интервала $v \leq u_0 < \sqrt{2}v$, в който знаменателят във формулите за $d_{\text{п}}$ и $|FF'|$ е различен от нула.

Фактът, че във въпросния интервал разстоянието между фокусите има отрицателни стойности, показва, че сега в началния момент Земята се намира не в афелия, а в перихелия на орбитата, т.е. началната скорост на Земята е и най-голямата скорост, която тя има при движението си, а минималната е, когато е в другия връх на елипсата (в афелия). Фокусът F', който при увеличаване на началната скорост от 0 до v, се измести от началното положение на Земята до фиксирания фокус – Слънцето, сега, при още по-големи стойности на u_0 продължава да се измества в същата посока, като се отдалечава от Слънцето. Заедно с това расте и голямата полуос на елипсата.

Енергията на системата Слънце – Земя при $v \leq u_0 < \sqrt{2}v$ се променя от $-G\frac{mM}{2R}$ (вж. (24) до:

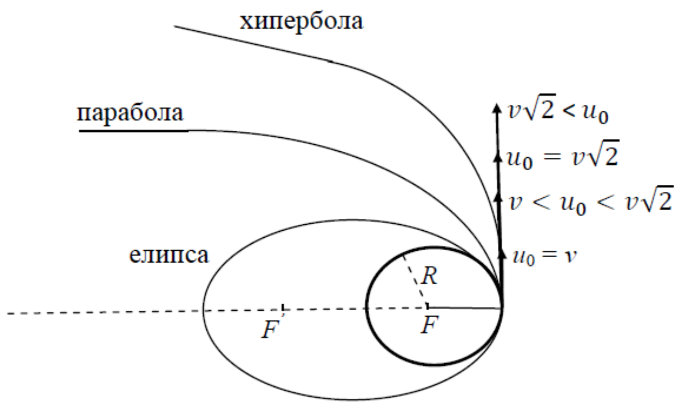
$$E = -G\frac{mM}{R} + \frac{mu_0^2}{2} = -G\frac{mM}{R} + \frac{m\left(\sqrt{2}v\right)^2}{2} = 0. \tag{27}$$

С други думи, когато $v \leq u_0 < \sqrt{2}v$, то $-G\frac{mM}{2R} \leq E < 0$.

Какво е положението при $u_0 = \sqrt{2}v$? В този случай знаменателят в (22) е нула, т.е. $|FF'| = \infty$ – фокусът F' е в безкрайност, а елипса, единият фокус на която е в безкрайност, вече не е елипса, а парабола. Енергията на системата в този случай е $E = 0$, движението не е периодично и Земята, отдалечавайки се безкрайно далече от Слънцето, остава там в покой спрямо него.

Накрая при $u_0 \geq \sqrt{2}v$ параболата се превръща в клонка на хипербола, като с увеличаване на началната скорост u_0 ъгълът между оста и асимптотите на хиперболата става все по-близък до 90°. В този случай енергията на системата е положителна ($E > 0$), както и в предишния случай движението не е периодично, но за разлика от него, отдалечавайки се безкрайно далече от Слънцето, Земята продължава да се движи с някаква крайна скорост.

Получените резултати са онагледени на фиг. 4, която, заради по-големите размери на траекториите, е в по-дребен от използвания на фиг. 3 мащаб. (На фиг. 4 началното разстояние R между Слънцето и Земята е представено с по-къса отсечка, отколкото на фиг. 3.)



Фиг. 4.

Така, окончателното заключение относно зависимостта на вида на орбитата от енергията на системата е:

при $E < 0$ – елипса
при $E = 0$ – парабола
при $E > 0$ – хипербола.

Въпрос 7.2.1. *Каква би била траекторията на Земята при $u_0 \sim c$? (Отг.: доближаваща се до лъч, перпендикулярен на отсечката, свързваща Слънцето и началното положение на Земята.)*

Въпрос 7.2.2. *С каква скорост би достигнала в безкрайност Земята, ако началната ѝ скорост е $u_0 = 3v$? (Отг.: $v\sqrt{7}$)*

Въпрос 7.2.3. *Пътуващ към далечен обект от Слънчевата система космически кораб преминава край Юпитер. В определен момент у космонавтите се поражда съмнение, че гравитацията на гигантската планета ги е отклонила от траекторията и корабът им всъщност е започнал да обикаля около нея. За да проверят съмненията си, в един момент те измерват разстоянието r до планетата и големината u на скоростта на кораба спрямо нея. Достатъчни ли са тези данни, за да се определи видът на траекторията на кораба?*

Дотук класифицирахме възможните орбити на Земята според големината на орбиталната ѝ скорост в момент, в който тя се намира в един от върховете на траекторията си (т.е. когато посоките на скоростта и тази към Слънцето са перпендикулярни). Космонавтите знаят само r и u, но не и ъгъла между скоростта на кораба и посоката към Юпитер. Тъй като и r, и u се променят с времето, поотделно те не са подходящи за търсената класификация, т.е. на пръв поглед r и u не са достатъчни за определяне на вида на траекторията на кораба.

Както е известно от предишните разглеждания обаче, такъв подходящ критерий е запазващата се енергия на системата Слънце – Земя. И това твърдение е валидно не само за системата Слънце – Земя, но и за всяка система от две тела, които си взаимодействат с гравитационна сила, а масите им удовлетворяват условието $m \ll M$.

При това положение, тъй като космонавтите знаят масата M на Юпитер, те трябва просто да определят само знака на величината $\Delta = -G\frac{M}{r} + \frac{u^2}{2}$, която представлява енергията $E = -G\frac{mM}{r} + \frac{mu^2}{2}$ на системата Юпитер – кораб, разделена на масата на кораба (енергия на единица маса). Тази величина, както и енергията, се запазва при движението, тя характеризира не моментното състояние на системата, не точката, в която се намира корабът, а цялата орбита. При това положение, съгласно с отговорите на предишните въпроси, видът на орбитата е:

– при $\Delta < 0$ – елипса (в частен случай – окръжност);

– при $\Delta = 0$ – парабола;
– при $\Delta < E$ – хипербола.

За разлика от предишните случаи обаче, тези данни не са достатъчни, за да се определи ориентацията на траекторията – космонавтите няма да могат да определят например направлението на голямата ѝ ос. Причината е, че във всички предишни случаи разполагахме с повече информация, например известна бе и посоката на скоростта в даден момент[3] (90°).

При търсене на времето за падане на Земята върху Слънцето се задоволихме с точност до части от денонощието – намерихме, че $\tau \approx 64{,}5$ дни. А, ако искаме да знаем това време с по-голяма точност? В този случай неизбежно би възникнал въпрос за точността, с която трябва да знаем радиуса на Слънцето. Отговорът на последния въпрос не е лесен, тъй като Слънцето няма твърда обвивка като Земята и трябва да се разсъждава по това, какво смятаме за негова повърхност. Всичко би се опростило, ако разглеждаме и Слънцето като материална точка. В раздела за гравитация на сборниците със задачи по физика обаче задачите, където се използва моделът материална точка, третират само ситуации, в които движещите се тела не са доближават на разстояния, сравними с техните размери. Затова последният въпрос, който може да се разгледа, е:

Въпрос 8. *Защо в сборниците не се среща следната задача*: *Две неподвижни материални точки с маси съответно m и M, намиращи се на разстояние R една от друга, в даден момент започват да се движат под действие на гравитационното привличане. След колко време ще се срещнат?*

Условието описва една типична за класическата механика ситуация: зададена е система от две тела с известна маса, зададени са началното състояние на системата (начални положения и скорости на телата) и силата, с която си взаимодействат. От времето на Лаплас е известно, че тези данни са достатъчни, за да се определи състоянието на системата във всеки следващ (или минал) момент, което включва, разбира се, и момента на срещата. Липсата на такава задача[4] в сборниците не се дължи на необходимостта от прилагане на някакви особени математически умения за решаването ѝ, а на съображения с далече по-принципен характер, изясняването на които допуска различна степен на общност и на задълбочаване.

Първият кръг от въпроси е свързан с факта, че задачата излиза извън рамките на класическата механика. Наистина, формула (11) показва, че скоростта, с която Земята достига повърхността на Слънцето, расте с намаляване на неговия радиус. И, ако разглеждаме и Слънцето като материална точка, тази скорост би била безкрайно голяма, т.е. неизбежно излизаме извън интервала от скорости, в който са валидни законите на Нютон.

Не бива да се създава обаче и впечатлението, че задачата за среща на две гравитационно провличащи се материални точки може да се реши със средствата на СТО. Ситуацията е далече по-сложна, защото е известно, че ускорителното движение на едно тяло е свързано с излъчване на гравитационни вълни, които отнасят част от енергията (и масата!) на системата, а падането на една материална точка върху друга е несъмнено движение с ускорение. Следователно задачата дори не е от областта на СТО – тук вече попадаме в проблематиката на общата теория на относителността (ОТО). И вече ни очакват не само математически трудности, но и редица концептуални неясноти. Така например трябва да се отчита, че по принцип всяко тяло с ненулева маса, но с нулеви размери, т.е. всяка материална точка представлява **черна дупка**, тъй като според фор-

[3] Този факт илюстрира общото правило, че колкото повече начална информация за една система притежавате, толкова по-конкретни предсказания можете да правите за бъдещото ѝ поведение.
[4] Разглеждане на този въпрос на равнището на училищната физика може да се намери в [5].

мула (25), щом $M \neq 0$, то и радиусът на Шварцшилд е различен от нула, т.е. той със сигурност е по-голям от „размерите" на материалната точка! Упростено казано, формулираната във въпрос 8. задача не е нищо друго освен задачата за сливане на две черни дупки[5], а това вече наистина не е задача за сборници, а проблем от предния фронт на науката!

Всички тези разсъждения показват ограничеността на модела **материална точка**, който така широко се използва в класическата механика. Най-общо може да се каже, че описаната във въпрос 8. ситуация противоречи на условията, при които е допустимо използването на този модел. Наистина, по определение едно тяло може да се разглежда като материална точка само ако в рамките на дадена точност формата и размерите му не влияят върху състоянието на системата. Обикновено това условие се свежда до изискването разстоянията до телата, с които тялото взаимодейства, да бъдат много по-големи от неговите размери. В нашия случай обаче телата се *срещат*, т.е. разстоянието между тях става нула, точно колкото са и размерите им, а не много по-голямо. (Разбираемо, но коректно изложение на възгледите на Айнщайн по проблема за гравитационното взаимодействие на материални точки може да се намери в [9].)

Как може да се използва всичко това?

Когато се обсъждат пътищата за повишаване ефективността на обучението по физика, наред с необходимостта от промени в съдържанието, от обогатяване на използваните методи и т.н., често се изтъква, че, за да бъдат учениците мотивирани, пред тях физиката трябва да се разкрива като **интересна** наука. Несъмнено това е едно от условията да бъде тя изучавана с желание, но въпреки това напредък в това отношение като че ли не се забелязва. Нещо повече, ако оценяваме настъпилите промени не по години, а по десетилетия, може би ще открием, че ако промени има, те по-скоро са в обратната посока – предметът физика като че ли става все по-сух и скучен. Една от причините е, че в учебниците предметът по традиция е представен едва ли не като талмуд, като сборник с истини от последна инстанция, в който може да се открие отговор на всеки въпрос. Лесно е да си представим как подобен подход влияе върху интереса към науката. Неведнъж се чуваха апели за преодоляване на този шаблон, за разкриване на реалните предизвикателства, които науката поставя пред човешкия ум и така да се изгради една по-интересна и по-привлекателна представа за нея. Недостигът на учебно време обаче силно стеснява възможността в клас да се отдели достатъчно внимание на самия път за достигане до научните истини, на тяхната ограниченост (т.е. на условията, при които те са валидни) и на все още нерешените от науката проблеми.

Както бе отбелязано в началото, това, което е невъзможно в клас обаче, може да се постигне чрез индивидуална работа с учениците. Днес едно силно облекчаващо подобна дейност на учителя обстоятелство е наличието на съвременни комуникационни средства, които правят незадължителен прекия контакт учител – ученик. В [1] и [2] бе обърнато внимание на факта, че дидактическият потенциал на решаването на задачи далече не се изчерпва само със затвърдяване на знанията и проверка и оценка на уменията за прилагането им, до което на практика се свежда. Чрез няколко примера бе по-

[5] Може би тук е уместно да напомним твърдението, че докато в класическата механика задачата за трите тела няма точно решение, в СТО няма решение дори задачата за две тела, а в ОТО се оказва, че е нерешим и проблемът за едно тяло...! (Да не говорим, че в квантовата механика няма решение и проблемът за нула на брой тела – свойствата на вакуума се оказват твърде необичайни...)

казано как с такъв ученик чрез решаване на подходящи физични задачи може да се разшири кръгът на преследваните дидактически цели. Тук една класическа задача (за падането на Земята върху Слънцето) отново се ползва като пример как, след получаване на отговора ѝ, може да се очертаят както някои от границите на приложимост на определени физични модели (материална точка) и теории (Нютоновата механика), така и някои от съвременните проблеми пред науката, което би стимулирало интереса към нея. Фактът, че се стига до въпроси, чиито отговор е или нееднозначен, или засега неизвестен, за ученика е предизвикателство, възбуждащо мисълта и въображението, а в хода на обсъжданията се избистрят проблеми, с което се илюстрират различните етапи на последователно доближаване към истината. Накрая, поставянето и разглеждането на подобни „въпроси без отговор" може да допринесе и за повишаване на мотивацията на ученика за изучаване на физика. (Проблемът за мотивацията рядко се обсъжда сред физиците, тъй като основните фактори за решаването му са извън нашата общност.)

Как на практика може да се използва предложения материал при изучаване на физика и астрономия по новата учебна програма? Най-лесно е учителят да предостави на ученика частта, съдържаща въпросите, след което заедно (дистанционно или в пряк контакт) да обсъдят неяснотите и неизбежно възникналите нови въпроси. Недостатък на този подход е пасивната позиция, в която е поставен ученикът.

По-ефективно би било, ако учителят поставя въпросите последователно, един след друг, като съответно предоставя достатъчно насочваща информация за пътя към отговорите. При това не е задължително да се разглеждат нито всички въпроси, нито в реда, в който са изложени по-горе (това се отнася например за решаването на задачата чрез метода на размерностите). Така например краткият път до решението на основния проблем – зависимостта между вида на орбитата и енергията на системата – включва разглеждане само на въпросите 2, 4, 7 и 7.2.

Темата е интересна и с това, че тя предлага разнообразни възможности за последващо развитие. Получените резултати например може да се използват за пресмятане на времето, след което ще се сблъскат два апарата, забравени на разстояние 1 m някъде из Космоса (вж. [5]). По-сложен проблем представлява използването на аналогията електростатика–гравитация (вж. [6]) за разглеждане на движението на заредена частица около неподвижен център (без квантови ефекти!) – например за колко време електронът в един атом би паднал върху ядрото, ако загуби орбиталната си скорост. Въпреки че в тези случаи ситуациите са нереални, разглеждането им има смисъл, защото чрез него се изграждат умения за оценки, за сравнения, разкриват се границите на областта на приложимост на определен закон (формула) и т.н.

Разбира се, в случай че учителят има възможност да работи не с един, а с няколко любознателни ученика, освен за индивидуална работа материалът може да се използва и в други форми, с които разполага арсеналът на методиката (дискусии и пр.).

Очевидно е, че не всяка задача е подходяща за подобно разширено решение. Разширеното решение обаче ще помогне за формиране на умение да се задават „хубави въпроси", което е необходима компонента от процеса на решаване на всеки проблем. Защото, според Поанкаре, коректно формулираната задача е наполовина решена задача.

Литература:

1. Попов Хр. Защо и как да превърнем една стандартна задача в малък изследователски проблем, Физика: Методология на обучението, **8**, 2020.

2. http://elearning-phys.uni-sofia.bg/~cpopov/Praktikum/MORFZ.pdf, задачи 19 – 21.

3. Иродов И.Е. Задачи по общей физике, zfftt.kpi.ua/images/library/irodov.pdf

4. Collection of Solved Problems in Physics, Charles University of Prague http://physicstasks.eu/1760/earth-falling-towards-the-sun

5. **Попов Хр.** Пример за разширено решаване на задача от динамика на две тела http://elearning-phys.uni-sofia.bg/~cpopov/Razni/razshireno%20reshenie.pdf

6. http://www.phys.uni-sofia.bg/~cpopov/Almanah-pdf/I%20chast/1%20metodika/20%20analogiya%20Nyuton%20-%20Kulon.pdf

7. **Голев В.** Астрономия 11. клас, Просвета София, 2004.

8. https://www.mon.bg/bg/100598

9. **Пайс А.** „Изкусен е всевишният...” Алберт Айнщайн н науката и живота, С., Унив. Изд. „Св. Климент Охридски”, 2004.