За Ахил, костенурката и сумата
на безкрайна намаляваща геометрична прогресия

С формулата за сума на безкрайна намаляваща геометрична прогресия ще се запознават само онези ученици, за които в 11. клас математиката е профилиращ предмет. Интересно е, че решаването на физични задачи дава възможност да стигнем до тази формула по един достъпен и за ученици от по-долните класове начин, който, разбира се, не претендира за строгостта на математическите доказателства. Логиката на този „физичен извод” може да се илюстрира най-лесно чрез следния пример, който използва известната апория (или парадокс) на Зенон.

Според Зенон, бързоногият Ахил никога не може да настигне една бягаща от него костенурка. „Доказателството” се опира на следното разсъждение. Ако Ахил е 10 пъти по-бърз от костенурката, като тръгнат едновременно, докато той стигне там, от където започва „състезанието” костенурката, тя ще се е отдалечила от това място на разстояние, 10 пъти по-малко от началната дистанция между двамата. През следващия интервал време, през което Ахил покорява това ново разстояние, костенурката вече ще се е отдалечила още и т.н., и т.н. Стигаме до абсурдния извод, че между Ахил и костенурката винаги остава някакво, макар и постоянно намаляващо разстояние.

Всеки осмокласник обаче би могъл да реши следната задача:

Ахил гони със скорост V костенурка, която „бяга” със скорост v. За колко време ще я настигне, ако в един момент разстоянието между тях е a?

Ясно е, че търсеното време t се определя от равенството:

$$Vt = a + vt\,,$$

което изразява, че разликата между пътищата, изминати за време t от Ахил и костенурката е a. От това равенство получаваме:

$$t = \frac{a}{V-v}.$$

Нека сега следваме логиката на Зенон. Ахил пробягва разстоянието a за време $t_1 = \frac{a}{V}$. За това време костенурката изминава път $vt_1 = \frac{v}{V}a$ и на Ахил ще му трябва време:

$$t_2 = \frac{v}{V}\frac{a}{V},$$

за да пробяга и това разстояние. А, тъй като за времето t_2 костенурката е успяла на „пробяга” още някакво разстояние, по същия начин пресмятаме, че на Ахил ще му е необходимо време:

$$t_3 = \left(\frac{v}{V}\right)^2\frac{a}{V},$$

за да преодолее и него и т.н.

Общото време, необходимо на Ахил за настигане на костенурката е:

$$t = t_1 + t_2 + t_3 + \cdots = \frac{a}{V}\left(1 + \frac{v}{V} + \left(\frac{v}{V}\right)^2 + \cdots\right).$$

Като си припомним, че всъщност $t = \frac{a}{V-v}$, приравним двата израза за t и направим съответните съкращения и преобразования, получаваме точно формулата за сума на безкрайна геометрична прогресия:

$$1 + \frac{v}{V} + \left(\frac{v}{V}\right)^2 + \cdots = \frac{1}{1-\frac{v}{V}}\,.$$

Разбира се, резултатът е правилен, но му липсва общност, няма критерий, който да указва кога получената формула може да се прилага и кога – не може. А, че тя не е общовалидна се вижда просто, ако опитаме да я приложим за случая $V < v$. В този случай резултатът е абсурден – пресметнатото време е отрицателно! В разгледания пример приложимостта на формулата се гарантира от подразбиращото се от само себе си предположение, че Ахил със сигурност е по-бърз от всяка костенурка.