Пример за решаване на физична задача
чрез графичния метод

Въпросът за използване на графичния метод в обучението по физика и по-специално – за решаване на задачи, е разработван в методическата литература неведнъж (за публикации от последните години вж. например [1, 2, 3, 4]). По-долу е разгледан пример за прилагането му към една по-сложна, но в замяна на това достатъчно обща задача, чието решаване изисква и начални умения по математичен анализ.

В [5] бе търсен отговор на въпроса: „Олекват ли миньорите под земята?" От гледна точка на методиката на обучение той е интересен, защото се използва аналогията между гравитационния закон на Нютон и закона на Кулон от електростатиката [6]. Именно тази аналогия позволява при решаване на редица проблеми да се използва гравитационният аналог на закона на Гаус [7], като досега този закон фигурираше в учебното съдържание за профилирано обучение по физика в 11. клас, а в бъдеще остава само в програмата за Международната олимпиада по физика [8].

По-долу се обсъжда един общ подход към проблема за „олекването", който, заради използването на елементи от висшата математика, е приложим само в индивидуалната работа с ученици с изявен интерес към физиката и математиката (например бъдещи „олимпийци"), или със студенти първокурсници.

Проблемът е свързан с факта, че когато плътността $\rho(r)$ на тяло зависи само от разстоянието r до една фиксирана точка (т.е. – когато разпределението на масите притежава сферична симетрия), извън тялото големината на ускорението на свободно падане $g(r)$ (земното ускорение), се определя от общата маса m на тялото, докато във вътрешността му зависи и от конкретния вид на функцията $\rho(r)$. Известно е (вж. например [9, с. 81]) , че вътре в хомогенно тяло въпросната зависимост на g е линейна (ускорението от 0 в центъра расте линейно и приема максималната си стойност на повърхността), а за тяло, състоящо се от хомогенно по-плътно кълбовидно ядро, обгърнато от хомогенен сферичен слой с по-малка плътност, ускорението има максимум вътре в слоя (вж. например [5, с.120]).

За да има все пак разглеждането на общия случай някаква прилика с действителността, може да се използва фактът, че плътността на една планета или звезда не е константа, като зависимостта ѝ от разстоянието до центъра на тялото се определя от гравитационните сили, от състава на тялото и процесите, които протичат във вътрешността му, и т.н. В случая конкретният вид на тази зависимост не е съществен – използва се единствено реалистичното предположение, че плътността е максимална в центъра на тялото и намалява с отдалечаване от него, зависейки само от разстоянието до този център. Поради тези съображения разглеждаме следната задача:

Плътността на небесно тяло с радиус R е намаляваща функция $\rho(r)$ от разстоянието r до центъра на тялото. Покажете, че съществува една и само една сфера с радиус $r_0 < R$, в чиито точки ускорението на свободно падане g е максимално.

Предварителни бележки. За да се реши задачата, е необходимо първо да се намери зависимостта на g от разстоянието r, която може да бъде както пряка, така и посредством плътността $\rho(r)$. Към този проблем са възможни поне два подхода.

Вариант А. Известно е, че заради аналогията между законите на Нютон и на Кулон, на редица получени в електростатиката зависимости съответстват аналози, валидни при гравитацията. За целта се използват следните правила (вж.например [6]):

– константата $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ се заменя с гравитационната константа G, т.е. $G \leftrightarrow \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$;

– електричният заряд Q на едно тяло се заменя с масата m на тялото („гравитационния заряд"), т.е. $Q \leftrightarrow m$;

– интензитетът E на електричното поле (електричната сила, действаща на единица заряд) се заменя с ускорението g на свободното падане (гравитационната сила, действаща на тяло с маса единица), т.е. $E \leftrightarrow g$.

В съответствие с тези правила на потока Φ_e на електричното поле E през затворена повърхност съответства поток Φ_g на g през повърхността, така че на закона на Гаус $\Phi_e = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ съответства зависимост:

(1) $$\Phi_g = 4\pi Gm,$$

където m е общата маса, затворена в заградения от повърхността обем.

В разглеждания случай ($\rho = \rho(r)$) от съображения за симетрия[1] следва, че посоката на g е радиална, т.е. във всяка точка от сфера с център т. O е перпендикулярна на сферата. Тъй като площта на сферата е $4\pi r^2$, следва, че потокът на g през въпросната повърхност е $\Phi_g = 4\pi r^2 g$ и от (1) получаваме:

$$4\pi r^2 g(r) = 4\pi Gm(r).$$

Така стигаме до търсената формула за зависимостта на ускорението на свободното падане от разстоянието:

(2) $$g(r) = G\frac{m(r)}{r^2},$$

в която $m(r)$ е масата на кълбото с радиус r.

Вариант Б. В този случай не се използват полеви представи и електростатични аналогии – достатъчен е законът на Нютон за гравитацията, с чиято помощ се доказва, че гравитационната сила, която действа на тяло, намиращо се в пространството, заградено от хомогенен сферичен слой, е нула. Доказателство на този факт се среща често в учебните помагала (вж. например [9]) и в него освен закона на Нютон се използват само известни зависимости от стереометрията. Също в [9] се намира и пълното изложение на този вариант на извод на формула (2).

Решение

Търсене на условие за екстремум. Тъй като търсим екстремум на функцията $g(r)$, трябва да диференцираме (2) и да приравним на нула първата производна:

(3) $$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r} = G\left[-\frac{2}{r^3}m(r) + \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}r}\right] = 0.$$

По своя смисъл $\mathrm{d}m$ представлява нарастване на масата на кълбо с радиус r при увеличаване на радиуса му с $\mathrm{d}r$. Фактически $\mathrm{d}m$ е масата на сферичен слой с дебелина $\mathrm{d}r$, площ $4\pi r^2$ и плътност $\rho(r)$, т.е. $\mathrm{d}m = 4\pi r^2\rho(r)\,\mathrm{d}r$. Като заместим този израз в (3) и отчетем, че $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ представлява обем на кълбото с радиус r, условието (3) за екстремум можем да запишем във вида:

(4) $$\rho(r) = \frac{2}{3}\frac{m(r)}{V(r)}.$$

Отношението $\frac{m(r)}{V(r)} \equiv \bar{\rho}(r)$ обаче представлява средна плътност[2] на въпросното кълбо, така че окончателният вид на условието за екстремум е:

(5) $$\rho(r) = \frac{2}{3}\bar{\rho}(r)$$

или:

---

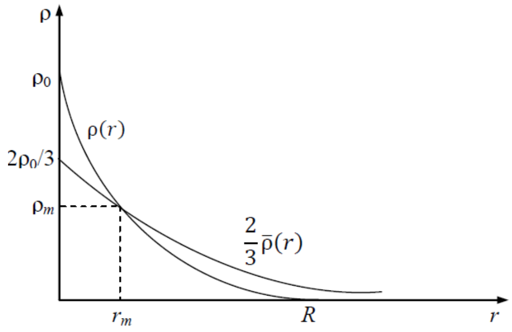
[1] Тъкмо този случай се има предвид в [8].

[2] Противоречие в случая няма: средната стойност на една функция зависи не само от функцията, но и от интервала, в който се променя независимата променлива, по която осредняваме.

Когато плътността на едно тяло е намаляваща функция на разстоянието до фиксирана точка, екстремумите на ускорението на свободно падане се намират на разстояния r *от центъра на симетрия, за които е изпълнено условието* (5).

Оттук например следва почти очевидният факт, че вън от тялото (т.е. при $r > R$) ускорението не може да има екстремум, защото там $\rho(r) = 0$, а $\bar{\rho}(r) \neq 0$ и условието (5) не може да бъде удовлетворено. Друг пример е хомогенно тяло, т.е. случаят, в който $\rho(r) = \rho_0$. При него вътре в тялото е изпълнено равенството $\bar{\rho}(r) = \rho_0$, така че (5) отново няма решение, което означава, че и вътре в такова тяло ускорението няма екстремуми. Ако ли пък разгледаме случая на линейно намаляваща плътност ($\rho(r) = \rho_0\left(1 - \frac{r}{R}\right)$), от (5) получаваме, че ускорението има един максимум на разстояние $r_m = \frac{2}{3}R$ от центъра на симетрия.

Мястото на графичния метод. Аналитичният характер на разглежданията може да продължи, за да се покаже, че екстремумът е единствен и че той е максимум. Видът на условието (5) подсказва обаче, че отговорите на тези въпроси може да се търсят и с помощта на графичния метод.



Фиг. 1

На фиг. 1 са показани две графики. Съгласно с условието на задачата локалната плътност $\rho(r)$ е намаляваща функция, т.е. от $r_1 < r_2$ следва $\rho(r_1) \geq \rho(r_2)$ за всички реални стойности на r_1 и r_2. В центъра на симетрия (т.е. при $r = 0$) тя със сигурност приема максималната си стойност, означена с ρ_0, а извън определена сфера с радиус R е нула, т.е. $\rho(r) = 0$ за $r > R$. Тези свойства определят примерния вид на графиката на $\rho(r)$. (За простота, на фигурата е показана графика на непрекъсната функция, но разсъжденията остават верни и когато има точки, в които $\rho(r)$ намалява със скок.)

В близката околност на центъра на симетрия средната и локалната плътности са равни, затова втората крива, изобразяваща функцията $\frac{2}{3}\bar{\rho}(r)$, започва от точката $\frac{2}{3}\rho_0$. Тази функция също е намаляваща[3], но за разлика от първата тя става нула едва при $r \to \infty$ (колкото и голям да е радиусът на една сфера, вътре в нея винаги присъства някаква маса, т.е. $m(r) \neq 0$ и затова, ако стойността на r е крайна, то $\bar{\rho}(r) \neq 0$).

Така описаните особености на двете криви гарантират, че наистина някъде в интервала $0 < r \leq R$ съществува точка r_m, в която те се пресичат, т.е. условието за екстремум (5) е изпълнено и тази точка е единствена.

[3] Освен чрез геометрични съображения този факт може да се провери и директно, като се пресметне, че $\frac{d\bar{\rho}}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{m(r)}{V(r)}\right) = -\frac{3}{r}\left(\bar{\rho}(r) - \rho(r)\right) < 0$.

За да се докаже, че екстремумът е максимум, може да се изследва поведението на втората производна на $g(r)$, но в случая е достатъчно и следното качествено разсъждение. От трите твърдения:

– ускорението на свободно падане при $r = 0$ е нула ($g(0) = 0$);
– ускорението на свободно падане е положителна величина;
– в интервала $0 < r < R$ ускорението $g(r)$ има само един екстремум,

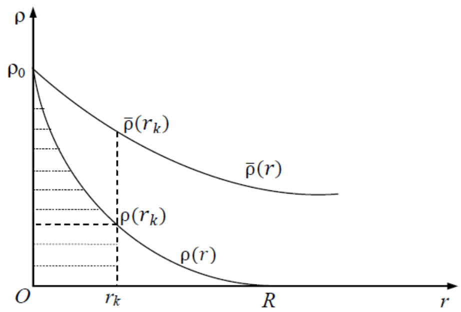
следва, че този екстремум е максимум.

По такъв начин верността на изказаното в условието на задачата твърдение е доказана.

Графичният метод на практика. И така, когато е зададено тяло с известна плътност $\rho(r)$, намирането на евентуален максимум на ускорението на свободно падане включва два етапа:

– Намиране на функционалната зависимост на средната плътност $\bar{\rho}(r)$ на кълбо от радиуса r на кълбото.
– Съставяне на уравнението (6) и решаването му спрямо r – коренът определя местоположението на максимума.

В зависимост от начина, по който е зададена функцията $\rho(r)$ (като аналитичен израз, таблично или графично), съвременните изчислителни средства предоставят разнообразни възможности за изпълнение на всеки от етапите. В случая, когато разполагаме с графика на $\rho(r)$, за да се намери местоположението на максимума, може да се използва графичният метод (фиг. 2).



Фиг. 2

За да се изпълни първият етап, координатната система, в която се чертае графиката на $\rho(r)$, се разполага на милиметрова хартия[4] заради достатъчно гъстата мрежа от квадратчета, позволяваща да се определи площта на фигура с произволна форма. Интервалът $0 < r < R$ от абсцисата се разделя на достатъчен брой еквидистантни точки r_k, за всяка от които трябва да определим стойността $\bar{\rho}(r_k)$ на средната плътност. По своя геометричен смисъл $\bar{\rho}(r_k)$ е равно на:

$$\bar{\rho}(r_k) = \frac{S}{r_k},$$

където S е площта на криволинейния трапец (защрихованата част от фиг. 2), чиито основи са частта от ординатата с дължина ρ_0 и успоредната ѝ отсечка с дължина $\rho(r_k)$, като трета страна (и съответно височина) му служи частта от абсцисата с дължина r_k, а

[4] Ако *милиметрова хартия* ви звучи като недопустим анахронизъм, може да използвате която и да е компютърна програма (например от типа на Origin), която позволява графиката на една функция да се изобрази върху произволно гъста мрежа от квадратчета.

като четвърта страна – съответната част от графиката. Площта S на трапеца се определя от броя на заградените от него квадратчетата.

След като точка по точка се построи кривата $\bar{\rho}(r)$, тази крива трябва да се пренесе успоредно така, че началото ѝ върху ординатната ос да бъде в точката $\frac{2}{3}\rho_0$ (както на фиг.1). Съгласно с решението на задачата пресечната точка на графиките на $\rho(r)$ и на $\frac{2}{3}\bar{\rho}(r)$ определя положението r_0 на търсения максимум.

Разгледаният пример демонстрира продуктивността на графичния метод както за намиране на критерий за съществуване на максимума, така и конкретно за определяне на неговото местоположение. Резултатът (5) е твърде прост и впечатляващ с общността си (т.е. не зависи от конкретния вид на намаляващата функция $\rho(r)$), а за получаването му са достатъчни не толкова сложни математични средства – факти, които обосновават възможността за използването му в отделни случаи както в училищната практика, така и в университетски курсове по обща физика.

Може да се отбележи, че от гледна точка на обучението по математика ключовите моменти в решението на задачата са два. Първият представлява осмислянето на производната като отношение между нарастването на една функция при малка промяна на аргумента ѝ, а вторият – използването на връзката между средна стойност на функция и заградената от графиката на функцията площ. Разбира се, един математик лесно би открил пукнатини в използваните в решението съображения с доказателствен характер, но това не би трябвало да отхвърля възможността чрез подобни разсъждения да се развива физичната интуиция. Както винаги, и в този случай става дума да се намери мярка – мярката в компромиса между строгост и нагледност.

Тема за размисъл. В първия вариант на извода на ключовата формула (2) един гравитационен „проблем”се решава чрез аналога на една електростатична зависимост (закона на Гаус). Този факт поражда въпроса не е ли възможно и обратното, т.е. в електростатиката да се получат подобни резултати, т.е. да се търсят екстремуми на интензитета на електричното поле в зависимост от плътността на обемни заряди, чието разпределение притежава сферична симетрия? Голямата разлика в случая се дължи на различието между двата вида заряди: докато „гравитационните заряди” са от един вид, т.е. масите на всички тела са положителни, то електричните заряди са два вида – положителни и отрицателни, така че между тях освен сили на привличане може да действат и сили на отблъскване. Поради тази причина например потокът на електричното поле през една сфера може да е нула, въпреки че вътре в сферата има електрични заряди.

Източници:

1. **Петрова Хр.** Формиране на графични знания и умения чрез решаване на физични задачи, Физика, **4**, 2010, с.177.
2. **Петрова Хр.** Формиране на графични знания и умения у учениците чрез решаване на графични задачи върху равномерно и равнопроменливо движение, Физика: Методология на обучението, **1**, 2013, с.33.
3. **Петрова Хр.** Графично представяне и решаване на физични задачи върху преходи между състоянията на веществата, Физика: Методология на обучението, **2**, 2014, с.29.

4. **Петрова Хр.**, Прилагане на графичния метод при изучаване на фотоефекта в средното училище, Физика: Методология на обучението, **6**, 2018, с.167.
5. **Попов Хр.** *55 + 13 решени физични задачи*, Просвета София, 2000, с. 120.
6. http://www.phys.uni-sofia.bg/~cpopov/almanah-pdf/I chast/1 metodika/20 analogiya nyuton - kulon.pdf
7. **Попов Хр., Т. Сугарев, Др. Иванов**, Физика за 11. клас на СОУ, Електродинамика, Просвета София, 1992.
8. Учебна програма на МОФ.
9. **Орир Дж.** Физика, т.1, Москва, Мир, 1981.