Физични задачи – решения с продължения

(Използване на графи след решаването на физична задача)

В училищната практика обикновено решението на една физична задача приключва с получаване на отговора – най-често някаква формула за (или на стойността на) търсената величина. Така, разбира се, постигаме редица основни цели на обучението като затвърдяване на знанията, придобиване на основни умения за прилагането им и др.п. Ако обаче не се задоволим с това и продължим работата и след получаване на отговора, това може да обогати кръга на постижимите дидактически цели с други, като засилване на интереса към физиката, развиване на физическото мислене, запознаване с някои научни методи и т.н. Тъй като силно ограниченото учебно време обикновено не позволява това да се прави в класните форми на работа, като възможност остават извънкласните – например индивидуалната работа с ученици, имащи изявени наклонности към природните науки. Такива ученици обикновено има във всяка паралелка (и нерядко – повече от един). По-долу тази идея се развива на основата на пример, от който се вижда как, тръгвайки от една относително проста задача, ситуацията може да се усложни и да се достигнат неочаквани и интересни резултати.

Обща схема. Етапите в решението на една задача (анализ на условието, работа с единиците, подбор на достатъчен брой зависимости за определяне на неизвестните и пр.) са познати от методическата литература. В случая се разглеждат възможности за **продължения** на работата **след** получаване на отговора. Като такива продължения може да се третират различни коментари и следствия, интересни частни случаи, или обратно –варианти, водещи до обобщения или нови зависимости и т.н. Като вид продължение може да се разглежда и намирането на алтернативни решения на задачата, решения, които разкриват нови страни на разглежданите процес или система, както и много други. В крайна сметка всяко **продължение** представлява някакво твърдение, или съвкупност от съждения, водещи до определен извод.

Интересното в случая е, че някои от намерените продължения може да имат свои собствени продължения (от същия или друг характер). Затова продълженията, които непосредствено следват от отговора, може да се разглеждат като *първични продължения* (продължения от *първа степен* или *ранг*), техните продължения (ако има такива) – като *вторични продължения* (продължения от *втора степен* или *ранг*) и т.н.

Подобен начин на действие лесно води до хаос в многобройните продължения и загуба на представа за връзките между тях. За въвеждане на определен ред, за изясняване кое с кое е свързано и от кое – независимо, е удобно работата след намиране на отговора на задачата да се онагледи чрез един ориентиран граф, построен по следните правила:

- Всеки възел (връх) на графа съответства на едно от продълженията на работата по задачата след намиране на отговора. (Затова по-нататък термините *възел, връх* и *продължение* са използвани като синоними.)
- Всяко ребро на графа представлява стрелка с начало във върха, използван като основание и край – във върха, съответстващ на извода (заключението) от съжденията, проведени на основата на едно или няколко основания.
- Всеки възел притежава индекс, който указва мястото му в йерархията на продълженията: броят на цифрите в индекса показва степента (ранга) на про-

дължението; цифрите в индекса без последната представляват индекс на възела–основание от по-ниската степен, а последната цифра – поредния му номер в групата продължения с общо основание.

– Наличието на „?” пред индекса е указание за продължение, което следва да се търси.

Смисълът на самите продължения зависи от конкретната задача и се разкрива в хода на решаването ѝ.

Примерна задача, разгледана по описаната схема

Задача. Два платнохода *K’* и *K”* плават един срещу друг с постоянни скорости съответно *v’* и *v”*. В момента, когато разстоянието между корабите е s_0, от *K’* към *K”* със скорост *v* излита гълъб. След като достигне *K”*, гълъбът полита със същата скорост обратно, среща К’ и отново лети в първоначалната посока и т.н., като остава върху отсечката, свързваща корабите. Какъв път *L* изминава гълъбът до срещата на корабите?

Решение. Разглеждаме v', v'' и v като големини (а не като проекции) на съответните скорости, всички разстоянията отчитаме от началното положение на *K’*. От условието следва, че скоростта на гълъба е не по-малка от скоростта на всеки един от корабите, т.е., че са изпълнени неравенствата:

(1) $$v' \le v \quad \text{и} \quad v'' \le v\,.$$

(В противен случай още в началото, ако не на отиване, то на връщане гълъбът ще изостане от по-бързия кораб и срещата ще се осъществи, преди гълъбът да се върне на К’[1].)

Ако съобразим, че времето *T* до срещата на корабите въобще не зависи от поведението на гълъба, задачата се решава почти на ум. Наистина, в момента *T* сумата от пътищата $v'T$ и $v''T$ на корабите е s_0 (т.е. $v'T + v''T = s_0$), така, че срещата се осъществява след време $T = \frac{s_0}{v'+v''}$, а за това време гълъбът, прелита разстояние:

(2) $$L = \frac{v}{v'+v''}s_0$$

– отговорът на задачата.

Оттук започва търсенето на **продължения**. Като първични продължения може да се разглеждат някои очевидни коментари и следствия от (2), като например:

1. Сумата $v' + v''$ представлява относителната скорост на корабите един спрямо друг. Фактът, че *L* зависи от v' и v'' не поотделно, а само чрез тяхната сума, показва, че освен от началното разстояние, дължината на полета на гълъба зависи само от относителната скорост на корабите. Единият кораб би могъл да е неподвижен, но ако относителната скорост е както преди, и прелетяното разстояние няма да се промени.

?1.1. Заключението, направено в първичното продължение 1. открива възможност да се търси негово продължение – проверка на валидността на формула (2) (или на нейна модификация) за случая, в който корабите не се срещат, а се настигат.

---

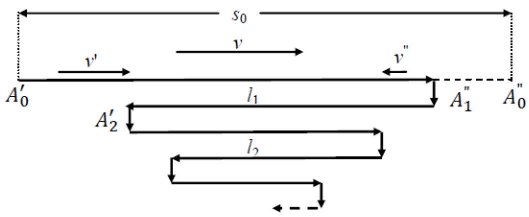
[1] Обикновено в сборниците в тази задача участват не за гълъб и кораби, а за муха, която лети между два насрещни влака. Разбира се, като по-екзотичен, този случай е и по-интригуващ. Той обаче е по-нереалистичен, защото, първо, скоростта на мухата трудно би удовлетворила неравенствата (1) и, второ, гълъбът е не само по-бърз, но и по-издръжлив на летене от мухата. (Модерната версия би била с дрон.)

2. Формула (2) показва, че най-късият път на гълъба е $s_0/2$ и, при условие, че са спазени неравенства (1), се постига само при $v' = v'' = v$. Така като следствие от (2) може да се разглеждат неравенствата $\frac{s_0}{2} \leq L \leq \infty$.

Разбира се, възможни са и други коментари към (2), но в случая е интересно едно трето първично продължение.

3. Ново решение на задачата.

На фиг. 1 е показан видът на пътя на гълъба:



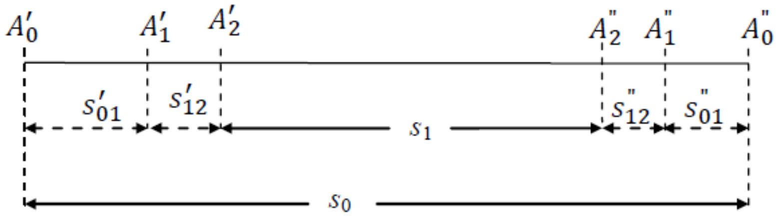
Фиг. 1.

В началния момент гълъбът и корабът K' тръгват от т. A'_0, като корабът K'' се намира в т. A''_0 на разстояние s_0 от тях. Летейки със скорост v, гълъбът среща K'' в т. A''_0, връща се към K' и го среща в т. A'_2, като общият изминат път на фиг. 1 е означен с l_1.

По-нататък гълъбът извършва същото по характер движение, като общият изминат път в този случай е означен с l_2 и т.н..

По такъв начин целият полет на гълъба се разделя на последователни, подобни един на друг и все по-кратки етапи. Ще потърсим изрази за продължителността t_n, дължината l_n на изминатия от гълъба път по време на n-тия етап, както и разстоянието s_n между корабите в неговия край.

Да разгледаме по-детайлно първия етап (фиг. 2). Времето t_1, необходимо за изминаването му е сбор от две времена: t_{01} за прелитане от т. A'_0 до срещата с K'' в т. A''_1 и времето t_{12} за връщането му от т. A''_1 в т. A'_2, до която е достигнал K'.



Фиг. 2.

През t_{01} гълъбът прелита път vt_{01}, като за същото време K'' се премества от т. A''_0 до т. A''_1, изминавайки път $s''_{01} = v''t_{01}$. Сборът от тези пътища е равен на началното разстояние между корабите:

(3) $$s_0 = vt_{01} + v''t_{01}$$

Оттук намираме, че гълъбът среща K'' след време:

(4) $$t_{01} = \frac{s_0}{v+v''}.$$

В момента, когато гълъбът среща K'', корабът K' е скъсил разстоянието между корабите с $s'_{01} = v't_{01} = \frac{v'}{v+v''}s_0$. Тъй като за това време K'' е скъсил същото разстояние с $s''_{01} = v''t_{01} = \frac{v''}{v+v''}s_0$, в началото на обратния полет ситуацията е като началната, но разстоянието между корабите вече не е s_0, а:

(5) $$s_0' = s_0 - s_{01}' - s_{01}'' = \frac{v-v'}{v+v''} s_0.$$

Следователно изрази за времето t_{12}, необходимо за връщане на гълъба върху *K'*, и за разстоянието s_1 между корабите в момента на завръщане ще получим, като във формули (4) и (5) разменим местата на v' и v", а s_0 заменим с s_0'. Така получаваме:

(6) $$t_{12} = \frac{s_0'}{v+v'} = \frac{v-v'}{(v+v')(v+v'')} s_0$$

(7) $$s_1 = \frac{v-v''}{v+v'} s_0' = \frac{(v-v')(v-v'')}{(v+v')(v+v'')} s_0.$$

От (4) и (6) за общото времетраене t_1 на първия етап получаваме:

(8) $$t_1 = t_{01} + t_{12} = \frac{2v}{(v+v')(v+v'')} s_0.$$

Общата дължина на пътя на гълъба през целия първи етап е:

(9) $$l_1 = vt_1 = \frac{2v^2}{(v+v')(v+v'')} s_0,$$

като, според очакванията, и (8), и (9) са симетрични по отношение на *v'* и *v''*.

С цел по-нататъшно опростяване записа на изразите е удобно да въведем два безразмерни параметъра ξ и η:

(10) $$\xi = \frac{2v^2}{(v+v')(v+v'')} \quad \text{и} \quad \eta = \frac{(v-v')(v-v'')}{(v+v')(v+v'')}.$$

С тяхна помощ формулите (8) – за времето t_1, (9) – за изминатия от гълъба път l_1 и (7) – за разстоянието s_1 между корабите в момента на първото завръщане на гълъба върху *K'* се записват във вида:

(11) $$t_1 = \xi \frac{s_0}{v}, \quad l_1 = \xi s_0 \quad \text{и} \quad s_1 = \eta s_0.$$

Като имаме предвид казаното по-горе за подобието на етапите и формулите (11), изразът за пътя l_2, който гълъбът ще прелети през втория етап и за разстоянието s_2 между корабите в момента на второто завръщане, ще имат вид съответно:

(12) $$l_2 = \xi s_1 = \xi \eta s_0 \quad \text{и} \quad s_2 = \eta s_1 = \eta^2 s_0.$$

По силата на същата логика съответните формули за величините при третото завръщане върху *K'* ще бъдат:

$$l_3 = \xi s_2 = \xi \eta^2 s_0 \quad \text{и} \quad s_3 = \eta s_2 = \eta^3 s_0\ ,$$

при четвъртото – $l_4 = \xi s_3 = \xi \eta^2 s_0$ и $s_4 = \eta s_3 = \xi \eta^2 s_0 (1 + \eta + \eta^2 + \eta^3 + \cdots)$ и т.н..

Тези разсъждения, заедно с получените формули водят до извода, че търсеният изминат от гълъба път L до срещата на корабите е:

(13) $$L = l_1 + l_2 + l_3 + \cdots = \xi s_0 + \xi s_0 \eta + \xi s_0 \eta^2 + \xi s_0 \eta^3 + \cdots,$$

т.е. представлява сума от членовете на една безкрайна геометрична прогресия с начален член ξs_0 и частно η.

В този пункт е съществено да се отбележи, че неравенствата (1) осигуряват $0 \le \eta < 1$ – условие, което позволява към дясната страна на (13) да приложим формулата за сума от членовете на безкрайна геометрична прогресия и след заместване на ξ и η с равните им от (10), след елементарни преобразования, да се убедим, че резултатът е същият като този от формула (2) – с което алтернативното решение е намерено.

Търсенето на второ решение би било безсмислено, ако то не се използва за намиране на нови продължения.

3.1. Първото ново продължение произтича от училищните условия: формулата за сума от членовете на безкрайна геометрична прогресия не се изучава. В такъв случай, като вземем предвид, че всъщност знаем отговора на задачата (формула (2)), можем да използваме този факт и да „изведем” тази формула „от физични съображения”.

Наистина, като приравним десните страни на (1) и на (13) и отчетем определенията (10) за ξ и η, получаваме:

(14) $$\xi s_0 + \xi s_0\eta + \xi s_0\eta^2 + \xi s_0\eta^3 + \cdots = \xi s_0 \frac{(v+v')(v+v'')}{2v(v'+v'')}.$$

За да стигнем до желания резултат, остава да изразим дробта в дясната страна на (14) чрез η. За целта е необходимо да довършим следната верижка от преобразования[2]:

(15) $$\frac{(v+v')(v+v'')}{2v(v'+v'')} = \frac{1}{\frac{2v(v'+v'')}{(v+v')(v+v'')}} = \frac{1}{1+\frac{2v(v'+v'')}{(v+v')(v+v'')}-1} = \cdots = \frac{1}{1-\eta}.$$

По този „физичен" начин неочаквано получихме още един[3] извод на формулата за сумата на безкрайна геометрична прогресия:

(16) $$\xi s_0 + \xi s_0\eta + \xi s_0\eta^2 + \xi s_0\eta^3 + \cdots = \frac{\xi s_0}{1-\eta},$$

за който вече сме сигурни, че е валиден поне когато $0 < \eta < 1$.

Разбира се, в този извод[4] на формула (16) има един малък, но лесно поправим пропуск: показахме, че само първите членове на сумата в скобите на (13) са членове на геометрична прогресия. Строгото прилагане на метода на пълната математична индукция, на който негласно се позовахме в разсъжденията, изисква да докажем, че ако n-тия член на сумата има вид $a\eta^n$, то следващият е $a\eta^{n+1}$ – нещо, което в случая не е трудно.

Да сумираме: как физиката помогна да избегнем математическия проблем за доказване на сходимостта на реда от членовете на безкрайна геометрична прогресия? Отговорът е: физичните съображения осигуряват, че когато скоростта на гълъба е по-голяма от скоростта на корабите (условието, от което следва $0 < \eta < 1$), той във всеки момент се намира между двата кораба.

3.2. Междинните резултати в хода на второто решение, дават възможност да се получи по-детайлна информация за полета на гълъба. Един от въпросите, на които първото решение не дава отговор е, например: колко пъти по време на целия полет гълъбът среща кораба, от който е излетял?

Строго погледнато, ако разглеждаме гълъба като материална точка, докато разстоянието между корабите стане нула, той среща всеки от тях безброй пъти[5]. С цел да се освободим от идеализацията „материална точка", можем да отчетем, че с разперени крила гълъбът има линейни размери от порядъка на, примерно, 30 cm. Ясно е, че когато разстоянието между корабите стане от порядъка на 30 cm, гълъбът вече не може да маневрира между тях и затова да приемем, че това е и моментът на срещата. Така стигаме

---

[2] Тук е слабият пункт в разсъжденията, защото той не подлежи на алгоритмизация, т.е. не е отнапред ясно дали дясната страна на (14) може да се изрази само чрез ξ и η. Затова неизбежно възниква въпросът „Как да се досетим за преобразованията (15)?" – въпрос, който навремето студентите задаваха на проф. Тагамлицки, когато в някое доказателство правеше непредвидима стъпка. В такъв случай професорът винаги отговаряше с характерната си усмивка и думите: „Умен човек съм, досещам се!". В случая, разбира се, не става дума за качества на ума, а за това, че отнапред знаем отговора.

[3] Ако в интернет–търсачка напишете *сума на безкрайна геометрична прогресия*, ще излезят толкова много резултати, че броят им може да съперничи с броя на доказателствата на теоремата на Питагор.

[4] Възможно е да възникне и друг въпрос: Защо в (14) и (16) не извадим в лявата страна множителя ξs_0 пред скоби и не го съкратим? Отговорът – защото не сме сигурни дали за безкрайните суми винаги е позволено да се вади общ множител пред скоби. Пример, показващ, че това не винаги е възможно е следният. Да означим с S сумата: $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots$ и да я преобразуваме по следния начин:
$S = 1 + 2(1 + 2 + 4 + 8 + \ldots) = 1 + 2S$. Решението на полученото просто уравнение за S е $S = -1$, което, разбира се, е абсурд.

[5] В някакъв смисъл ситуацията наподобява описаната в известната апория на Зенон: Бързоногият Ахил никога не може да настигне костенурката, която има 100 метра аванс пред него, защото докато той пробяга първите 50 m, тя ще измине 10 cm, докато той пробяга следващите 25 m, тя ще се отдалечи с още 5 cm и т.н. – до безкрайност.

до нова задача, в която освен скоростите и началното разстояние, е зададен още един линеен параметър – размерът на гълъба.

Задача 1. Два платнохода *К'* и *К"* плават един срещу друг с постоянни скорости съответно v' и v''. В момента, когато разстоянието между тях е s_0, от *К'* към *К"* със скорост v полита гълъб. След като достигне *К"*, гълъбът лети със същата скорост обратно, след срещата с *К'*отново лети в първоначалната посока и т.н., оставайки между корабите. Ако размерите на гълъба са от порядъка на d, оценете колко пъти (N) гълъбът ще срещне *К'* до срещата между корабите.

Решение. Решението се основава на продължението на разсъжденията, с които получихме формули (11) и (12). От тях следва, че в момента на N-тото си завръщане на *К'* разстоянието между корабите е:

(17) $$s_N = \eta^N s_0.$$

Като отчетем, че сега $s_N = d$ и решим полученото уравнение спрямо N, за броя на срещите на гълъба и *К'* получаваме израза:

(18) $$N = \frac{\ln\frac{d}{s_0}}{\ln\eta} = \frac{\ln\frac{d}{s_0}}{\ln\frac{(v-v')(v-v'')}{(v+v')(v+v'')}}.$$

Да приложим тази формула за един конкретен случай, за да преценим доколко е реалистичен полученият резултат. Нека корабите се движат с еднаква скорост $v' = v'' =$ 10 m/s, а гълъбът лети с два пъти по-голяма скорост, т.е. v = 20 m/s, d = 0,3 m. Ако началното разстояние между корабите е s_0 = 9 km, според формула (18) $N \approx 4{,}69$, т.е. в този случай гълъбът ще срещне кораба *К'* не повече от пет пъти – едно изненадващо малко число, но резултатът е напълно разумен.

3.2.1. Да разгледаме и частния случай на „гълъб–материална точка", т.е. случая d = 0. Както трябва да се очаква, в този случай от (18) следва $N \to \infty$. Този резултат е удивителен в едно отношение: за времето, за което корабите се сближават от 9 km до 30 cm, гълъбът прави само 4 – 5 „курса" между тях, а за останалите по-малко от 0,2 s (толкова е времето, за което разстоянието между корабите намалява с 30 cm) трябва да направи безкраен брой прелитания[6]!

3.2.2. Разсъжденията може да продължат и по-нататък. Така формулирана, задача 2. съдържа известна неопределеност, дължаща се на неопределеността на понятието *момент на среща на корабите.* По-горе приехме, че корабите са се срещнали, ако гълъбът не може да маневрира между тях. Съществуват обаче и други възможности. За да направим ситуацията още по-реалистична, може да поставим въпроса доколко отговорът зависи от избора на критерий за определяне момента на среща на корабите. В случая като критерий избрахме размерите на гълъба, т.е. решихме, че полетът спира, когато разстоянието между корабите стане равно на d. А, ако тези размери са не 30 cm, а с 10 % по-малки – напр. 27 cm? Пресметнатата по формула (18) новата стойност на N е $N' \approx$ 4,74, т.е. разликата от предишния резултат е само малко повече от 10 %.

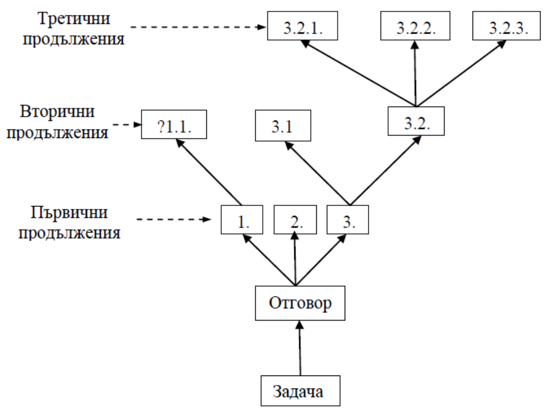
3.2.3. Друг начин за приближаване към действителността (в рамките на идеализацията „гълъб–материална точка") е да отчетем, че достигайки един от корабите, гълъ-

[6] Последното твърдение се основава на равенсвото ∞ – 5 = ∞, верността на което математиците обикновено илюстрират със следния пример. Ако искате да се настаните в хотел, в който всички стаи са заети, няма да успеете. Ако обаче хотелът е с безкраен брой стаи, въпреки че няма свободни, настаняването ви е сигурно: достатъчно е обитателят на първата стая да се прехвърли във втората, обитателят на втората – в третата и т.н., всички стари обитатели преминават в стая, чиито номер е с единица по-голям и ... така първата стая остава свободна за вас, т.е. наистина ∞ + 1 = ∞!

бът не може мигновено да смени посоката на скоростта си. Да предположим, че той кацва на кораба и полита обратно след престой от една секунда. Тогава в качеството на друг *критерий за среща* на корабите може да изберем момента, в който те са на онова разстояние, което изминават за 1 s, т.е. на d = 20 m (в този случай гълъбът няма да се връща). Да пресметнем отново от (18) колко курса е извършил гълъбът, докато корабите се сближат на 20 m. Резултатът е $N \approx 2{,}78$, т.е. сега гълъбът среща *К'* само два пъти. Ако ли пък сега той „почива" върху кораба с 10 % по-малко, т.е. само 0,9 s, резултатът ще бъде $N \approx 2{,}82$ – около 1,5% по-малко от предишния случай.

Сравнението на двата случая показва, че резултатът за N при втория критерий е по-нечувствителен към промяна на избраната величина (време за престой), отколкото при първия, когато използвахме разстоянието (размерите на гълъба).

Граф на продълженията. За разгледания конкретен пример схемата на продълженията след получаване на отговора на задачата може да се илюстрира със следния граф, построен по формулираните в началото правила (фиг. 3).



Фиг. 3.

Вижда се, че за конкретната задача графът съдържа три първични, три вторични и три третични продължения, като едно от вторичните подлежи на разработка.

Полза от графите? Учителят може да си облекчи индивидуалната работа с учениците, ако предварително построи граф на продълженията на задачата. С негова помощ може да постигне и по-нататъшна индивидуализация, като (в случай, че работи с повече от един ученик) на различни ученици поставя задача да проследят различни пътища (или на един ученик поставя задача да проследи последователно пътищата), които очертава самият граф. (Някои възможности, които предлага например графът от фиг. 3 са 3 → 3.1, или 3 → 3.2 → 3.2.1, също 3 → 3.2 → 3.2.3 и т.н.)

Използването на графи на продълженията обаче може да допринесе за постигане на много по-принципно важни цели.

Известно е, например, че реалните физични проблеми са многопластови в смисъл, че решението им зависи от различни фактори, сред които съществува определена иерархия в зависимост от тяхното влияние. Колко пласта (фактора) ще отчетем зависи примерно от равнището, до което е достигнала науката, времето, с което разполагаме за решаването, често – от икономически съображения (финансиране), възможности на изчислителната техника и мн.др. Когато смятаме проблема за решен, това означава, че сме отчели само краен брой пластове, които лежат под него, а всички останали сме пренебрегнали като несъществени. С други думи, непременно сме направили определен брой идеализации, пренебрегнали сме фактори като например размерите на едно движещо се или на едно заредено тяло, съпротивлението на въздуха, вискозността на течност, съпротивлението на съединителни проводници, дисперсията на светлината, зависимостта на обема на твърдо тяло от температурата и т.н., и т.н. (да не излизаме от рамките на класическата физика).

Обучението по физика и особено – решаването на задачи, е благоприятно за разкриване на тази многопластова структура на проблемите. За бъдещи специалисти с творчески професии от областта на природните науки или на техниката е от значение още в училище да привикнат да разкриват структурата и йерархията на тези пластове, да могат във всеки конкретен проблем да разграничат съществените от несъществените фактори, като се съобразяват само с първите. Именно за постигане на тази цел, която е част от по-общата дидактическа цел за запознаване с научните методи на познанието, може да се използват графите с продълженията, ако учителят привлече ученика при построяването им.

Какво може да прави учителят. Идеята за „работа след решението на задачата” разкрива различни възможности за творческа изява на учител, който се заинтересува от нея.

На първо място, като се има предвид, че далеч не всяка задача предлага интересни възможности за построяване на граф на продълженията, стои въпросът да се подберат достатъчен брой подходящи задачи от различни раздели на физиката[7].

На второ място стои въпросът въз основа на решенията на тези задачи да се попълва списъка на видовете продължения (изброените в началото продължения далеч не изчерпват всички възможни видове) и се потърси някаква тяхна класификация.

По-нататък следва да се разгледа какви типове графи се срещат при различните физични задачи (например, може ли два възела на графа да бъдат свързани с повече от една стрелка, възможни ли са графи, в които има затворени пътища, възможни ли са непланарни графи и т.н.) и съответно да се класифицират. Може да се потърси възможност за използване на графите като един от критериите за оценка на трудността на дадена задача или за това, доколко тя събужда интерес.

Накрая, разбира се, стои въпросът за дидактическата ефективност от използването на метода на графите, който, предвид ограничения брой на учениците, способни да се увлекат в подобна работа, може би е и най-труден.

В заключение: макар използването на метода на графите да не води пряко до задълбочаване или разширяване на знанията, той показва в явен вид логическите връзки между коментарите към решението, като с това допринася за запознаване с духа на физиката и с някои методи на научното мислене въобще.

---

[7] Задачи, чиито решения са в духа на тук разработения пример, могат да се намерят в “53+15 решени задачи по физика” от Хр. Попов, както и на адреси: http://elearning-phys.uni-sofia.bg/~cpopov/ и http://www.phys.uni-sofia.bg/~cpopov/almanah-pdf/ . Там продълженията се срещат под название *И по-нататък, Коментари, Следствия* и др.