Пет задачи (четири от тях – тривиални), решени чрез анализ на размерностите

Сред физиците е популярно наглед парадоксалното твърдение, че човек не бива да се захваща с решаване на задача, чиито отговор не знае предварително. (Приписват го на Поанкаре, на Джон Уилър – учителя на Файнман, а и на други учени). Разбира се, в случая *знаенето на отговора* не трябва да се разбира буквално, защото в противен случай самото решаване на задачата губи смисъл. Всъщност, на практика за отговора винаги предварително има известна информация. Така например, ако се търси масата на тяло се получи отрицателно число, или времето, за което автомобил изминава разстоянието от София до Варна се получат няколко наносекунди, това са все сигурни признаци за груба грешка (разбира се, при коректно поставена задача). По същия начин сигурно има грешка, ако за броя атоми или кванти се получи дробно, а не цяло число, или при търсене скоростта на космическо тяло се получи число, по-голямо от скоростта на светлината. Примерите в това отношение може да се множат неограничено, тъй като въз основа на физичните закони и на опита винаги отнапред е известна определена количествена или качествена информация за неизвестното. Проблемът, който поставя споменатото в началото твърдение е: как тази информация да се направи по-конкретна, да се стеснят границите, в които се намира отговорът, евентуално – да се определи неговият числен порядък.

Една възможност в това отношение предоставя **анализът на размерностите** (**методът на размерностите**). Той се използва и когато точното решение на една задача е невъзможно с наличните математически средства. Методът често позволява да се определи с точност до безразмерен множител от порядъка на единица функционалната зависимост между търсената и известните величини, както и да се оцени порядъка на неизвестното.

По-долу припомняме някои от основните правила за прилагане анализа на размерностите, илюстрирани с четири повече или по-малко тривиални примера, като накрая методът се използва и за решаване на една задача от класическата механиката.

Популярно и достатъчно сбито изложение на същността на метода на размерностите се намира например в статията на Г.А.Тирский [1], както и в двете лекции на Д.И.Трубецков [2], прочетени в школа за ученици от горните класове. Разбира се, най-пълно е изложението на метода в станалата класическа книга на Нобеловия лауреат П. Бриджмен [3]. Методът се основава на факта, че **размерността на всяка физична величина представлява едночлен, който е произведение от степени на размерностите на величините, чиито единици са приети за основни**. Доказателство на това твърдение е приведено в книгата на акад. Л.И.Седов [4].

Като се ограничим с механичните явления и отчетем, че за тях в SI основни са единиците за разстояние, за време и за маса, чиито размерности се бележат съответно с L, T и M, горното твърдение означава, че размерността $[x]$ на всяка механична величина x представлява израз от вида:

(1) $$[x] = L^a.T^b.M^c,$$

където a, b и c са безразмерни реални числа.

Във всяка задача размерността на неизвестната величина x е позната, т.е. за нея числата a, b и c са известни. Основен етап при анализа на размерностите е изборът на параметрите *P, Q. R, S*… от които зависи *x.* В много случаи тези параметри представляват физични величини, но често решението на една задача може да се облекчи значително, ако като параметри се използват и комбинации от физични величини (вж. пример 5). При това, от съображения, които се изясняват по-долу, стремежът е броят на тези параметри да бъде минимален.

След като параметрите са избрани, размерността на *x* се представя като произведение от техните размерности, всяка повдигната в подлежаща на определяне степен α, β, γ, δ..., т.е.:

(2) $$[x] = [P]^{\alpha}.[Q]^{\beta}.[R]^{\gamma}.[S]^{\delta}\ldots .$$

Тъй като размерностите на самите параметри *P, Q. R, S*... са известни, т.е. известно е представянето им като степени на *L, T* и *M*, като заместим техните изрази в (2), направим съответните приведения и отчетем (1), равенство (2) придобива вид:

(3) $$L^{a}.T^{b}.M^{c} = L^{m}.T^{n}.M^{h},$$

където *a, b* и *c* са известни, а *m, n* и *h* представляват линейни комбинации с известни коефициенти на неизвестните α, β, γ, δ.... Чрез приравняване на степенните показатели на *L,T*, и *M* от лявата и дясната страна на (3) получаваме система от три линейни уравнения с неизвестни, чиито брой съответства на броя на параметрите *P, Q. R, S*... . По принцип, когато този брой не надхвърля три, решението за α, β и γ определя функционалната зависимост на *x* от *P, Q* и *R*. И доколкото в уравненията, определящи поведението на механичните системи не фигурират множители, на порядъци отличаващи се от единицата, то и получената функционална зависимост определя *x* с точност до безразмерен числен множител от порядъка на единица.

Усложнения при използване на анализа на размерностите възникват, когато в задачата участват различни величини с еднакви размерности (например ъглова скорост и честота), както и когато параметрите *P, Q*... са повече от три (в този случай броят на уравненията не е достатъчен за определяне на неизвестните). Възможности за прилагане на метода в тези случаи се разглеждат в цитираните източници. Една от тях ще илюстрираме в последния, пети пример.

Пример 1. Да се намери връзката между изминатия за време *t* път *s* от тяло, движещо се с постоянна скорост *v*.

Първи етап от решението: неизвестната величина път *s* зависи от параметрите (в случая – също физични величини) скорост *v* и време *t*. Размерността на неизвестната величина е $[s] = L$ (това е аналогът на формула (1)), а размерностите на параметрите – съответно $[v] = LT^{-1}$ и $[t] = T$. В този случай уравнение (2) има вид:

(4) $$[s] = [v]^{\alpha}[t]^{\beta}, \quad \text{или} \quad L = (LT^{-1})^{\alpha}T^{\beta}.$$

Следователно уравнение (3) за конкретната задача е:

$$L^{1}T^{0} = L^{\alpha}T^{\beta-\alpha}.$$

Приравняването на степенните показатели на *L* и *T* от двете страни на равенството осигурява система от две уравнения с две неизвестни:

$$\alpha = 1 \quad \text{и} \quad \beta - \alpha = 0,$$

чието очевидно решение е α = 1 и β = 1, което, съгласно с (4) означава, че търсената връзка е:

(5) $$s = kvt,$$

където k е безразмерен множител, чиято стойност зависи от избора на единицата за скорост. Когато скоростта се измерва в $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, стойността му е $k = 1$, т.е. $s = vt$.

Пример 2. Да се намери продължителността на годината, т.е. времето T, за което Земята обикаля около Слънцето при предположение, че орбитата ѝ е кръгова.

Първо определяме параметрите, от които зависи търсеното време T. Тъй като движението на Земята се определя от гравитационната сила, очевидно за известни трябва да смятаме масите M и m на двете тела, разстоянието R между тях (т.е. разиуса на земната орбита), както и гравитационната константа G, участваща в закона на Нютон за гравитацията. (Както обикновено, заради голямата разлика в масите, Слънцето смятаме неподвижно.) Всъщност, T няма да зависи от масата на Земята, защото тя участва и в лявата (ma), и в дясната ($G\frac{mM}{r^2}$) страна на уравнението на движение, поради което се съкращава.

Опитвайки да решим задачата с метода на размерностите отбелязваме, че търсената величина T има размерност на време, т.е. в случая равенство (1) има вид:

(6) $$[T] = L^0.T^1.M^0.$$

Съгласно казаното, като параметри, определящи продължителността на годината избираме радиуса R на земната орбита, масата M на Слънцето и гравитационната константа G. Това означава, че равенство (2) в случая има вид:

$$[T] = [R]^{\alpha}\,[M]^{\beta}[G]^{\gamma}.$$

Тъй като $[R] = L$, $[M] = M$ и $[G] = L^3M^{-1}T^{-2}$, като заместим тези размерности в горното равенство, получаваме еквивалента на (3):

(7) $$L^0.M^0.T^1 = L^{\alpha+3\gamma}.M^{\beta-\gamma}.T^{-2\gamma}.$$

Приравняването на степенните показатели в десните страни на (6) и (7) води до линейната система от три уравнение с три неизвестни:

$$\alpha + 3\gamma = 0$$
$$-2\gamma = 1$$
$$\beta - \gamma = 0,$$

чието решение е:

(8) $$\alpha = \frac{3}{2},\ \beta = \gamma = -\frac{1}{2}\,.$$

Следователно зависимостта на T от избраните параметри се описва с формулата:

(9) $$T = kR\sqrt{\frac{R}{MG}}.$$

Ако приемем, че $k \approx 1$, за продължителността на годината получаваме:

(10) $$T \approx R\sqrt{\frac{R}{MG}}\,.$$

При точното решение на задачата се отчита фактът, че за кръгова орбита гравитационната и центростремителната сила са равни, т.е.:

$$\frac{mv^2}{R} = G\frac{mM}{R^2},\quad \text{от където} \qquad v = \sqrt{\frac{GM}{R}}.$$

Тъй като пътят, изминат от Земята със скорост v за време T е $2\pi R$, за търсената величина T намираме:

(11) $$T = 2\pi R\sqrt{\frac{R}{MG}}.$$

Сравнението между (10) и (11) показва, че разликата между истинската продължителност на годината и пресметнатата чрез анализ на размерностите при $k = 1$ е 2π, т.е. повече от 6 пъти. Разбира се, това не е малка разлика, но все пак остава вярно твърдението, че методът определя правилно вида на функционалните зависимости и порядъка на величините,.

За да разкрием причината за разминаването между истинската продължителност на годината и получената по метода на размерностите ще разгледаме следната популярна задача (вж. напр. [5], зад. 1.241).

Пример 3. Да се намери времето τ, за което Земята би паднала върху Слънцето, ако в един момент загуби орбиталната си скорост.

Търсейки решение чрез анализ на размерностите отбелязваме, че τ ще зависи отново от масата *M* на Слънцето, от разстоянието *R* между небесните тела в началото на падането и от гравитационната константа *G*. Веднага се вижда, че това са същите три величини, определящи продължителността на годината в пример 2. Следователно, ако продължим да прилагаме метода, ще стигнем до същия резултат (9) $\tau = kR\sqrt{\frac{R}{MG}}$, т.е. за две различни задачи методът на размерностите дава един и същ отговор.

Преди да обсъдим този факт нека да припомним и точното решение на задачата от пример 3. То използва само законите на Кеплер, като отсечката, по която Земята пада към Слънцето се разглежда като граничен случай на безкрайно сплесната елипса, т.е. на елипса с малка полуос нула и голяма ос, равна на разстоянието *R* между двете тела. Тогава, ако отново означим продължителността на земната година с *T* и движението на Земята по кръговата ѝ орбита разглеждаме като движение по елипса с голяма **полу**ос *R*, от третия закон на Кеплер получаваме връзката:

(12)
$$\frac{T^2}{(2\tau)^2} = \frac{R^3}{\left(\frac{R}{2}\right)^3},$$

където τ е търсеното време за падане (в (12) фигурира 2τ, защото τ е времето за изминаване на само половината от безкрайно сплеснатата елипса).

От (12) за τ намираме:

(13)
$$\tau = \frac{T}{\sqrt{32}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}T,$$

или, като отчетем, че продължителността *T* на годината се описва с формула (11), окончателно:

(14)
$$\tau = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}R\sqrt{\frac{R}{MG}}\,.$$

Сравнението между (14) и (9) показва, че в случая безразмерният множител е:

(15)
$$k = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1{,}11\ldots,$$

т.е. разликата между точния отговор и получения по метода на размерностите е само малко повече от 10 %.

Лесно се забелязва, че при подходящи означения формули (11) и (14) стават идентични. За целта е достатъчно да отчетем, че при кръговото движение *R* е голяма полуос *a* на „елипсата” (т.е. $R = a$), докато в случая на падане върху Слънцето *R* е цялата голяма ос (т.е. $R = 2a$). Тогава, ако изобщо с *T* означим периода на движенията и отчетем, че за третия пример $T = 2\tau$, виждаме, че наистина в новите означения двете формули приемат един и същи вид:

(16) $$T = 2\pi a\sqrt{\frac{a}{MG}},$$

което не е нищо друго, освен израз на третия закон на Кеплер $\frac{T^2}{a^3} = \text{const.}$

Последната бележка позволява чрез метода на размерностите да се реши и по-общата задача:

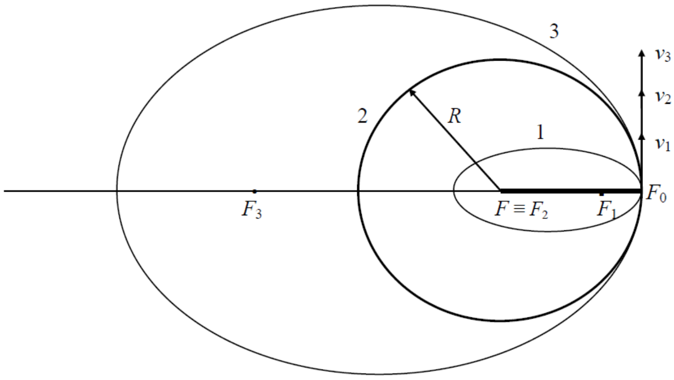
Пример 4. Да се намери периодът на обикаляне на планета около Слънцето, при условие, че са познати законите на Нютон за гравитацията и първият закон на Кеплер.

В този случай вече разстоянието до Слънцето не фигурира като параметър в условието, тъй като в общия случай то се изменя с течение на времето. Естественият избор на параметър с размерност на разстояние пада върху голямата полуос a на елипсата. Както и в пример 2, уравнението на движение елиминира масата на Земята като параметър и същите разсъждения като проведените там сега водят да формулата:

(17) $$T = ka\sqrt{\frac{a}{MG}}.$$

Сравнението на (17) с резултата (11), получен за частния случай на движение по кръгова орбита, при който $a = R$, показва, че $k = 2\pi$. Този резултат съвпада с приведената в ([6], с. 38) формула, получена след решаване на задачата на Кеплер.

Формула (17) определя периода на обикаляне около Слънцето чрез един от параметрите на траекторията – голямата полуос a на елипсата. Типично за механичните задачи обаче е не задаване на траекторията, а на началното положение и началната скорост на движещото се тяло. На фиг. 1 е показан примерният вид на четири орбити, по които би се движила Земята при различни по големина начални скорости, перпендикулярни на посоката към намиращото се в т. F Слънце. (Точка F е фиксираният фокус на елипсите – първи закон на Кеплер). Двойната отсечка FF_0 изобразява безкрайно сплеснатата елипса, по която Земята би падала към Слънцето при начална скорост нула. Втори фокус на тази „елипса” е т. F_0 – другият край на отсечката, т.е. точката, от която започва падането. Орбита 1 се получава при начална скорост v_1, по-малка от онази скорост v_2 на Земята, при която движението ѝ е по окръжността 2 с радиус R. (При движението по кръговата орбита двата фокуса на елипсата съвпадат.) Накрая орбитата 3 съответства на скорост $v_3 > v_2$.



Фиг. 1.

Както за тези четири, така и за цялата фамилия от орбити, получени при други големини на началната скорост, методът на размерностите води до една и съща функционална зависимост (9) на периода на движенията от R, M и G. Различна за тях е само стойността на безразмерния множител k, който зависи от големината на началната скорост, тъй като именно тя е различна за членовете на фамилията орбити, четири от които са показани на фиг. 1.

В последния, пети пример е показано как чрез анализ на размерностите може да се реши и тази, вече нетривиална задача, строгото решение на която изисква решаване на задачата на Кеплер, т.е. на система от две обикновени диференциални уравнения от втори ред.

Пример 5. Да се намери продължителността T на годината на планета, ако в един начален момент тя се намира на разстояние R от Слънцето, а скоростта ѝ е с големина v и посока – перпендикулярна на посоката към него[1]. Масата M на Слънцето е много по-голяма от масата на планетата, гравитационната константа е G.

Така формулирана, задачата е типична за класическата механика: известни са силата ($G\frac{mM}{r^2}$), масите на телата и началните условия: техните положения и скорости в началния момент. Тази информация е по принцип достатъчна за намиране закона на движение на планетата, а следователно – и на търсения период T на движението.

Анализът на размерностите изисква избор на минимален брой параметри, определящи неизвестното. Както и в предишните примери, поради това, че в уравнението на движение масата m на планетата се съкращава ($ma = G\frac{mM}{r^2}$), търсеният период няма да зависи от m.

Една величина, от която T със сигурност зависи, е масата M на Слънцето. Тъй като в закона за силата тя фигурира не самостоятелно, а само в комбинация с гравитационната константа, като параметър, определящ T е по-удобно да се избере тяхното произведението (GM).

Втори сигурен параметър, от който зависи T е началното разстояние R между планетата и Слънцето.

Несъмнено също така T зависи и от големината v на началната скорост на планетата. Като параметър обаче скоростта v не е удобна поради следните съображения. Наистина, да се върнем към фиг. 1 и проследим как се променя елипсата с увеличаване на v. При $v = 0$ планетата пада към Слънето по отсечката, която ги свързва (т.е. – по безкрайно сплеснатата елипса). При това периодът, т.е. времето за изминаване на отсечката в двете посоки е **крайна** величина (според формула (14) – $T = \frac{\pi}{\sqrt{2}}R\sqrt{\frac{R}{MG}}$). С увеличаване на v „подвижният” фокус на елипсата се премества към Слънцето (елипса 1) и когато v е равна на скоростта на движение по кръгова орбита, двата фокуса съвпадат (орбита 2). При по-нататъшно нарастване на v „подвижният” фокус се отдалечава от Слънцето (т. F) и при някаква **крайна** стойност на v фокусът отива в безкрайност, елипсата „се отваря”, превръщайки се в парабола, а периодът T става безкрайно голям, т.е. движението престава да бъде периодично. (При още по-големи начални скорости движението е по клон от хипербола, т.е. – също не е периодично.)

[1] Може би заслужава да се отбележи защо изрично се подчертава, че в началния момент ъгълът между скоростта и отсечката, свързваща планетата със звездата е прав. Отговорът е: в противен случай задачата не е определена. В общия случай, т.е. при произволна стойност на този ъгъл, търсеният период зависи и от него, като в този случай вече методът на размерностите не е достатъчен за намиране на периода.

И така: при $v = 0$ периодът T е крайна величина, а при някаква достатъчно голяма, но крайна стойност v' той става безкрайно голям. Няма физични съображения, които да говорят, че при нарастване на началната скорост периодът T има минимуми или максимуми. Следователно при изменение на началната скорост от 0 да v', периодът T расте монотонно от някаква крайна стойност до безкрайност. Подобно поведение има например функция от типа $\frac{1}{v'-v}$. Не е възможно обаче чрез метода на размерностите да се получи зависимост от този вид, тъй като методът е приложим само за случаите, в които функционалните зависимости са произведения от различни степени на аргументите. Това именно е съображението, поради което началната скорост v неподходяща като параметър.

Подходяща като параметър би била величина, която зависи от v, като при $v = 0$ има крайна стойност, а при v' (т.е. – при параболична орбитата) става безкрайност или нула (защото $\frac{1}{0} = \infty$). Една величина с подобно поведение е механичната енергия на планетата, т.е. сумата от нейната кинетична и нейната гравитационна потенциална енергия:

(18) $$E = \frac{mv^2}{2} - G\frac{mM}{R}.$$

Изразът (18) е за енергията в началния момент, но тъй като тя е запазваща се величина, той е валиден и във всеки момент на движението.

Както при $v = 0$, така и за всички елиптични орбити E е отрицателна величина и става нула при $v_{\max} = \sqrt{2G\frac{M}{R}}$. Тъй като отрицателно число, повдигнато в реална степен, е, изобщо казано, комплексно число, а величините в (2) трябва да бъдат реални, при избора на параметъра използваме не самата енергия E, а нейния модул. Освен това, тъй като според (18) $E \sim m$, а T не може да зависи от масата m, заключаваме, че всъщност подходящ параметър би било отношението $\frac{\lfloor E \rfloor}{m}$.

След избора на параметрите R, GM и $\frac{\lfloor E \rfloor}{m}$ записваме равенство от типа (2):

(19) $$[T] = [R]^{\alpha}[GM]^{\beta}\left[\frac{\lfloor E \rfloor}{m}\right]^{\gamma}.$$

Размерностите на неизвестното и на трите параметра са както следва:

(20) $$[T] = T, \quad [R] = L, \quad [GM] = L^3T^{-2} \quad \text{и} \quad \left[\frac{\lfloor E \rfloor}{m}\right] = L^2T^{-2}.$$

Като заместим тези изрази в (19), получаваме равентвото:

(21) $$T^1 = L^{\alpha}(L^3T^{-2})^{\beta}(L^2T^{-2})^{\gamma}.$$

Сравняването на степенните показатели пред двете основни единици L и T води до следната система от две уравнения за неизвестните α, β и γ:

(22) $$\begin{aligned} \alpha + 3\beta + 2\gamma &= 0 \\ -2\beta - 2\gamma &= 1. \end{aligned}$$

Тази системата е непълна – поради специалния избор на параметрите GM и $\frac{\lfloor E \rfloor}{m}$ единицата за маса не фигурира в (21). (Дори като параметри да бяхме избрали R, M, G и $\lfloor E \rfloor$, пак би се получила непълна система, само че в този случай уравненията биха били 3, а неизвестните – 4.)

Ако от (22) определим β и γ чрез α, получаваме:

(23) β = –α + 1 γ = α – 3/2.

Като използваме тези изрази за β и γ и в (19) вместо размерностите пишем съответните величини, за търсената функционална зависимост получаваме:

(24) $$T = kR^{\alpha}(GM)^{1-\alpha}\left(\frac{|E|}{m}\right)^{\alpha-\frac{3}{2}} = kGM\left(\frac{m}{|E|}\right)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{R|E|}{GMm}\right]^{\alpha},$$

където k вече е безразмерно число. Лесно се проверява, че изразът $\frac{R|E|}{GMm}$ също е безразмерен, т.е. резултатът (24) е съвместим с изискването на известната в теорията на метода на размерностите П-теорема (вж. напр. [2], [3]).

В цитираната литература са описани подходи за решаване на проблема с неопределености от получения тип. В случая е удобно да увеличим броя на основните единици. (Не бива да се забравя, че изборът на броя и на вида на основните единици се диктува от съображения, които най-общо може да се определят като съображения за удобство. Както е възможно да се построи система, в която единиците за всички величини са основни, така е възможно да се построи и система, в която няма нито една основна единица.)

Дотук, следвайки SI, смятахме, че в механиката основни са единиците за разстояние, за време и за маса. Няма принципни пречки обаче да разглеждаме и единиците за други величини като основни. В случая може да се направи следното разсъжение.

Възможно е разстоянията, които фигурират в избраните параметри да се разделят в два класа. Към единия клас причисляваме разстояния, от които зависят динамичните величини като сила и енергия. Означенията за тях и за тяхната единица ще снабдим с индекс d – съответно R_d и L_d. При това положение например изразите за гравитационната сила и гравитационната потенциална енергия ще имат вид съответно $F = G\frac{mM}{R_d^2}$ и $E = -G\frac{mM}{R_d}$. Към втория клас отнасяме разстоянията, свързани с началните условия – тях и единицата им ще бележим с индекс n – съответно R_n и L_n. При това положение двете единици L_d и L_n ще разглеждаме като независими, т.е. – като основни и тогава вместо с (20), размерностите на параметрите ще се изразят с равенствата:

(25) $[T] = T$, $[R_n] = L_n$, $[GM] = L_d{}^3T^{-2}$ и $\left[\frac{|E|}{m}\right] = L_d{}^2T^{-2}$.

Така вместо равенство (21) получаваме:

(26) $$T^1 = (L_n)^{\alpha}(L_d^3T^{-2})^{\beta}(L_d^2T^{-2})^{\gamma}.$$

Сравняването на степенните показатели пред трите основни единици в лявата и в дясната страна на (26) вече осигурява система от три уравнения с три неизвестни, чието решение е:

(27) α = 0, β = 1, γ = –3/2.

С тези стойности на α, β и γ търсената зависимост приема вида:

(28) $$T = kGM\left(\frac{m}{|E|}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Формула (28) по същество съвпада с резултата, получен в [6] след решаване на Кеплеровата задача.

Като отчетем, че гравитационната енергия се описва с израза (18), решението на поставената задача се дава с израза:

(29)
$$T = k\frac{GM}{\left|\frac{v^2}{2} - G\frac{M}{R}\right|^{\frac{3}{2}}} = k\frac{GM}{\left(G\frac{M}{R} - \frac{v^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

(В последното равенство отчитаме, че при скорости, при които траекторията е елипса, абсолютната стойност на потенциалната енергия на планетата е по-голяма от кинетичната ѝ енергия.)

Стойността на безразмерния коефициент k в (29) може да се определи, като се използват някои от разгледаните в началото частни случаи. Така от сравняване на израза, получен от (29) при $v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ (движение по кръгова орбита) и формула (11), намираме, че $k = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$. По този начин окончателното решение на задачата е:

(30)
$$T = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\frac{GM}{\left(G\frac{M}{R} - \frac{v^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Последният пример илюстрира добре възможностите на метода на размерностите: само чрез него и с помощта на определени физични съображения и резултата от решението на един елементарен частен случай решихме задача, която по принцип изисква използване на средствата на висшата математика.

Очевидно броят на задачите, решими чрез анализ на размерностите е силно ограничен. Методът обаче заслужава внимание не само защото позволява да решим някои задачи, които излизат извън рамките на училищната математика. Ползата от него е преди всичко в това, че докато традиционният път на решаване на количествени задачи обикновено се свежда първо – до досещане как да се набере необходимият брой връзки между неизвестните величини и, второ – до преодоляване на някакви математически трудности за решаване на получените уравнения, то анализът на размерностите изисква и приучва към по-дълбоко вникване във физиката на явленията.

Източници:

1. **Тирский Г.А.** Анализ размерностей, Соросовский образовательный журнал, т. 7, № 6, 2001, с. 82–87.
2. **Трубецков Д.И.** Две лекции. Анализ размерностей или райская жизнь в физике, Изв. вузов „ПНД”, т. 20, №1, с. 16–32.
3. **Бриджмен П.** Анализ размерностей, Ижевск, НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика”, 2001, 148 стр.

http://www.vixri.com/d/a_fizika/Bridzhmen_Analiz%20razmernostej%20(2001).pdf

4. **Седов Л.И.** Методы подобия и размерностей в механике, М., Наука, 1972.
5. **Иродов И.Е.** Задачи по общей физике, zfftt.kpi.ua/images/library/irodov.pdf
6. **Попов В.** Теоретична механика, учебно пособие, С., 2009

http://www.phys.uni-sofia.bg/~vpopov/tm-book.htm