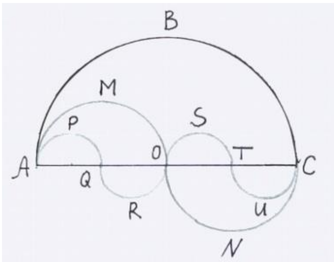
„Доказателство", че π = 2 ... и една поука за физиците!?!

Числото π не е давало покой не само на математици и философи. Само фактът, че е невъзможно да се запише точната му стойност, дава повод на мнозина да се съмняват дори в реалното му съществуване (каквото и да означава последното). В подкрепа на това твърдение ще напомним, че преди повече от 15 години в интернет се разпространяваше една история, която за мнозина звучи невероятно. Депутатът от Алабама Леонард Лий Лоусън внесъл в законодателния орган на щата законопроект, според който стойността на π следва да се коригира и фиксира на числото 3 – точно! Вносителят действал от името на Соломоновото общество (група, поддържаща „традиционните ценности", като под последното в САЩ обикновено се подразбират ценностите, прокламирани в Библията). Основание за това той вижда в Светото писание, в която ясно е казано (трета книга на царете 7:23), че „куполът на олтара на Соломоновия храм е бил десет лакътя напреки и с обиколка тридесет лакътя и още, че е бил кръгъл"[1]. Ясно е, че щом диаметърът на един кръг е „десет лакътя", а обиколката – „тридесет лакътя", то единственият извод е, че π = 30:10 = 3! Предвиждало се, след като проектът стане закон, да се направят съответните корекции в учебниците по математика и т.н. И този законопроект за малко щял да бъде приет...!!!

Разбира се, има хора, които не вярват сляпо на всичко написано в древните книги и предпочитат да се доверят на това, което виждат. На тях предлагаме следния „извод", основаващ се на показаната фигура. На нея отсечката *AC* е използвана като



диаметър, върху който е построена полуокръжност *ABC*. Тъй като по определение π представлява коефициент, с който трябва да умножим диаметъра, за да получим дължината на *цялата* окръжност, очевидно $|ABC| = \frac{\pi}{2}|AC|$. За опростяване на писането ще приемем, че дължината на диаметъра е единица, т.е. $|AC| = 1$, така че изходното равенство е:

(1) $$|ABC| = \frac{\pi}{2}.$$

Нека след това върху отсечката с единична дължина построим две еднакви полуокръжности *AMO* и *ONC* с диаметри съответно 1/2. (Това, че едната от тях е начертана над, а другата – под отсечката, е направено само от „естетически" съображения и няма значение за по-нататъшните разсъжденията.) Като отново

[1] Съответният текст в българския превод на Светото писание гласи: "Направи още и леяното море, с устие десет лакътя широко, кръгло наоколо, а с височина пет лакътя; и връв от тридесет лакътя го измерваше околовръст." *Библия*, Британско и чуждестранно библейско дружество, 1923, с. 319.

използваме дефиницията за π, за дължината на всяка от двете дъги можем да запишем $|AMO| = |ONC| = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$, така че сумата им се оказва отново:

(2) $$|AMO| + |ONC| = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Следващата стъпка е лесно предвидима: върху отсечката AC построяваме четири полуокръжности APQ, QRO, OST и TUC, всяка с диаметър 1/4. Лесно се пресмята, че сумата от дължините им е отново $\frac{\pi}{2}$, т.е.:

(3) $$|APQ| + |QRO| + |OST| + |TUC| = \frac{\pi}{2}.$$

Предвидими са и стъпките по-нататък: трябва да построим върху AC вълнообразни линии, състоящи се съответно от 8, 16, 32 и т.н. еднакви полуокръжности. И на всеки етап дължината на получената вълнообразна линия, т.е. сумата от дължините на дъгите ще бъде една и съща – все π/2. Ясно е обаче, че при този безкраен процес точките на вълнообразните линии се приближават все повече и повече към точките на отсечката AC и в граничния случай двете линии ще съвпаднат.

Следователно и дължините на двете линии са равни. И тъй като приехме, че $|AC| = 1$, оттук и от (1) получаваме:

$$\pi = 2.$$

Този абсурден резултат, разбира се, се дължи на погрешното твърдение, напечатано по-горе с по-плътен шрифт: от това, че точките на една крива се приближават безкрайно близко към точките на друга крива, съвсем **не следва**, че дължината на едната крива клони към дължината на другата крива. Тази контраинтуитивна математическа истина бе едно от първите неща, които студентите математици и физици чуваха от проф. Я. Тагамлицки на лекцията му за дължина на крива в курса по диференциално и интегрално смятане...

Поуката за физиците. Нека погледнем на тези разглеждания по-общо. *Дължината на крива* представлява някаква функция, която зависи от формата на кривата, а ако тя не е затворена – и от положенията на началната и на крайната ѝ точка. Върху една крива може да се дефинират най-различни функции – дължината е само частен случай на такава. „Доказателството”, че π = 2 свидетелства за наличие на функции, дефинирани върху сходяща безкрайна редица от криви, чиито стойностите не клонят към стойността на функцията върху граничната крива.

Физичната величина **работа на сила** е функция, дефинирана върху крива – кривата, по която се премества приложната точка на силата. В редица елементарни учебници любим прийом за доказване на консервативността на някои сили (най-често гравитационната и електростатичната) е пресмятането на работата по произволна гладка крива да се представи като граничен случай на пресмятането ѝ по подходяща начупена крива с растящ брой чупки. При това **без доказателство** се приема, че работата по гладката крива е равна на границата на работата по начупените криви. С други думи, тихомълком се приема, че функцията **работа** не е от типа на функциите, към които принадлежи функцията **дължина** и за които подобно твърдение не е вярно.