За средната скорост при равнопроменливи движения

От определението за средна скорост на учениците е известно, че стойността на тази величина може да се пресметне, ако се познават изминатият път s и времето t за изминаването му ($v_{ср.} = \frac{s}{t}$). Съществено разширяване на знанията може да се постигне, ако средната скорост се свърже и с други величини, не само с пътя и времето. Това е възможно в случай, че се познава законът за движение, като в зависимост от неговия вид, и резултатите са различни. Прост пример в това отношение са познатите равнопроменливи движения – при тях средната скорост зависи само от началната и от крайната скорост на движение. Запознаването на учениците с елементарния извод на съответната формула би спомогнало за разширяване представите им както за величината, така и за начините за нейното пресмятане.

Става дума за едно следствие от законите за скоростта v и пътя s при равнопроменливи движения, на което обикновено не се отдава дължимото внимание, въпреки че то е полезно не само при решаване на задачи, но има и определено *по-общо методологично значение*. Това следствие се получава чрез елиминиране на ускорението a от формулите за скоростта и пътя:

(1) $$v_2 = v_1 \pm at$$

(2) $$s = v_1 t \pm \frac{1}{2}at^2 ,$$

в които v_1 и v_2 са съответно началната и крайната скорост на движещото се тяло. (Стойностите на всички величини са положителни, знакът "+" е за равноускорително, а знакът "–" – за равнозакъснително движение.)

Ако за удобство запишем (1) във вида:

(3) $$\pm at = v_2 - v_1 ,$$

от формулите (2) и (3) получаваме:

(4) $$s = \left(v_1 \pm \frac{1}{2}at\right)t = \left(v_1 + \frac{v_2 - v_1}{2}\right)t = \frac{v_1 + v_2}{2}t .$$

Като означим с:

(5) $$v_{ср.} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

средноаритметичната на началната и на крайната скорост на движение, търсеното следствие добива вида:

(6) $$s = v_{ср.}t .$$

Сравнението между (6) и определението за средна скорост $v_{ср.} = \frac{s}{t}$ показва, че определената с формула (5) величина е точно средната скорост при равнопроменливите движения. И така:

При равнопроменливо движение изминатият път е право пропорционален на времето за движение и на *средноаритметичната* от началната и от крайната скорост на движение.

Интересно е, че формула (5) е валидна както за равноускорителни, така и за равнозакъснителни движения, т.е. не е необходимо да се пишат знаци "±", както в (1) и (2). Разбира се, важно е да се помни, че резултатът е валиден именно за *равнопроменливи движения*! Изводът на тази формула представлява може би единственият случай, в който с елементарни средства можем да пресметнем средна скорост без да познаваме пътя и времето за изминаването му (т.е., без пряко да използваме дефиницията $v_{\text{ср.}} = \frac{s}{t}$).

Споменатото по-общо методологично значение на получената формула (5) се определя от факта, че сега имаме възможност да покажем на учениците какво означава един резултат **да се обобщи**. Наистина, равнопроменливото движение може да се разглежда като по-общо от равномерното движения. Равномерното движение е негов частен случай, случай, в който ускорението е нула. Затова и всички формули, валидни при равномерните движения, трябва да се получават при $a = 0$ от съответните формули за равнопроменливи движения. Вижда се, че когато движението е равномерно, т.е. при $v_1 = v_2 = v$, по-общата формула (5) преминава в познатата формула $v_{\text{ср.}} = v$, която е валидна за равномерните движения и изразява просто, че средната скорост на равномерното движение е равна на моментната скорост. Подобно редуциране на общия резултат към частния е характерна черта, общо изискване към всяко обобщение в науката!

Едно следствие от (6) се получава за конкретния случай на движение без начална скорост (т.е. при $v_1 = 0$) или, когато в края на движението тялото спира (т.е. при $v_2 = 0$). Ако в тези случаи означим с v крайната (респ. – началната) скорост, от (5) и (6) получаваме:

$$s = \frac{1}{2}vt \, . \tag{7}$$

Точно този резултат ще използваме, за да илюстрираме ползата от формула (5), като решим следната качествена задача.

Задача[1]**.** Кое време е по-голямо: времето за спускане на едно тяло по наклонена равнина без начална скорост, или времето за издигане на тялото нагоре по равнината, когато му бъде придадена такава начална скорост, че то достигне и спре в горния край на равнината? Движенията се осъществяват **при наличие** на триене при хлъзгане.

Решение. Силата на триене зависи от нормалния натиск, който е един и същ при спускане и при издигане, и освен това – постоянен. Тъй като и теглото на тялото е постоянно, то и двете движения са равнопроменливи (едното – равноускорително, другото – равнозакъснително).

Нека за конкретност означим с m масата на тялото, с h – височината на наклонената равнина, а с g – земното ускорение. В отсъствие на триене, при спускането си, в долния край на равнината тялото би имало скорост, която се описва с познатия израз $\sqrt{2gh}$. Поради триенето обаче, част от началната гравитационна потенциална енергия mgh се превръща във вътрешна енергия на триещите се тела, така че реално скоростта в края на спускането е $v_{\text{сп.}} < \sqrt{2gh}$.

В отсъствие на триене, за да се достигне тялото горния край на наклонената равнина, където потенциалната му енергия е mgh, би трябвало да го тласнем нагоре със скорост $\sqrt{2gh}$. Отново заради триенето, което превръща част от придадената кинетична енергия във вътрешна енергия, за да достигне все пак тялото горния край на равнината, трябва да му придадем скорост $v_{\text{изд.}} > \sqrt{2gh}$.

Изводът от тези разсъждения е, че скоростта $v_{\text{сп.}}$, която тялото достига в долния край на наклонената равнина след спускане, и скоростта $v_{\text{изд.}}$, която трябва да му придадем, за да достигне горния ѝ край, са свързани с неравенството:

$$v_{\text{сп.}} < v_{\text{изд.}} \tag{8}$$

---

[1] Буздин А. И. и др. *Задачи московских физических олимпиад*, Москва, "Наука", ГРФМЛ, 1988.

Тъй като в двата случая изминатият път е един и същ, а двете движения – равнопроменливи, въз основа на формула (7) можем да запишем равенството:

(9) $$\frac{1}{2}v_{\text{сп.}}t_{\text{сп.}} = \frac{1}{2}v_{\text{изд.}}t_{\text{изд.}}.$$

Оттук, при отчитане на неравенството (8), следва:

(10) $$t_{\text{сп.}} > t_{\text{изд.}}.$$

И така, отговорът на задачата е: времето за спускане на тялото е по-голямо от времето, за което то се издига.

Случаят, в който трябва да се отчита и съпротивлението на въздуха, е по-сложен, защото силата на съпротивление зависи от скоростта и движенията вече не са равнопроменливи. Въпреки това, въз основа на енергетични съображения, и в този случай може да се покаже, че изводът (10) остава валиден (вж. цитирания източник).