Използване на аналогията между закона на Нютон и закона на Кулон за решаване на задачи

Аналогията между формулите, изразяващи гравитационния закон на Нютон ($F_{gr} = G\dfrac{mM}{r^2}$) и закона на Кулон ($F_{el} = \dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$), позволява да се решат някои интересни задачи, като известни резултати от областта на гравитацията се използват за решаване на електростатични задачи, както и обратно – резултати, получавани сравнително лесно в електростатиката, се използват за решаване на гравитационни задачи.

Сравнението между двата закона показва, че количествените зависимости, валидни в електростатиката и в гравитационното поле могат да се получават една от друга със следните замени:

– гравитационната константа G се заменя с Кулоновата константа $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, т.е. $G \leftrightarrow \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$;

– електричният заряд Q на едно тяло се заменя с масата M на тялото (“гравитационния заряд”), т.е. $Q \leftrightarrow m$;

– интензитетът E на електричното поле (електричната сила, действаща на единица заряд) се заменя с ускорението g на свободното падане (гравитационната сила, действаща на тяло с маса единица), т.е. $E \leftrightarrow g$;

– и т.н.

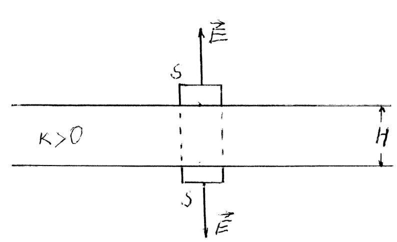
По подобен начин, ако в една формула фигурира плътността ρ на масите, в съответната формула от електростатиката ще фигурира обемната плътност k на зарядите, т.е. $\rho \leftrightarrow k$.

Разбира се, аналогията между двата закона засяга само големините на силите. Съществените разлики са следствие от два факта:

– докато електричните заряди са два вида (положителни и отрицателни), “гравитационните заряди” – масите на телата, са само един вид, положителни;

– докато едноименните електрични заряди се отблъскват, “гравитационните заряди”, въпреки че са едноименни, се привличат.

Следователно в случаите, в които роля играят посоките на силите, може да се очакват различия (напр. при пресмятане на работа и свързаните с нея величини като потенциални енергии, потенциали и др.п.). По тази причина например Кулоновият потенциал на точков заряд Q се описва с израза $\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$, а гравитационният потенциал на материална точка с маса M – с израза $-G\dfrac{M}{r}$.



Фиг. 1.

Преди да разгледаме първия пример, ще припомним извода на формулата за интензитет E на електричното поле над безкрайна плоско-паралелна плоча с дебелина H, изпълнена с обемни заряди с плътност k = const (фиг. 1). За целта прилагаме теоремата на Гаус за прав цилиндър с височина, перпендикулярна на плочата и основи с площ S, лежащи от двете ѝ страни. Общият заряд в цилиндъра е $Q = kHS$ (произведението HS представлява обема на онази част от цилиндъра, в която има заряди). От съображения за симетрия е ясно, че интензитетът на полето върху двете основи на цилиндъра има една и съща големина и противоположни посоки, перпендикулярни на плочата. Тъй като силовите линии на полето не пробождат околната повърхност на цилиндъра, общият поток на полето през затворената цилиндрична повърхност е $\Phi_E = 2ES$. Като използваме теоремата на Гаус ($\Phi_E = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$, където ε_0 е електричната константа), намираме връзката между интензитета на полето, обемната плътност на зарядите и дебелината на плочата:

$$E = \frac{kH}{2\varepsilon_0}. \tag{1}$$

Този резултат използваме за решаване на следната задача.

Задача 1. В представите на някои древни цивилизации Земята е огромна плоска плоча. При каква дебелина на плочата и плътност, равна на средната плътност на Земята, на телата би действала същата сила на тежестта, както при кълбовидна Земя?

Решение. Ако запишем формула (1) във вид:

$$E = 4\pi \frac{kH}{2(4\pi\varepsilon_0)}$$

и използваме гореизложените аналогии, за ускорението на свободното падане при плоска Земя с дебелина H и обемна плътност на масите ρ, получаваме израза:

$$g_{\text{пл}} = G4\pi \frac{\rho H}{2}. \tag{2}$$

От закона на Нютон следва, че ускорението $g_{\text{к}}$ на свободното падане при кълбовидна Земя с радиус R и плътност ρ се описва с израза:

$$g_{\text{к}} = G\frac{M}{R^2} = \frac{G}{R^2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)\rho = \frac{4\pi}{3}GR\rho. \tag{3}$$

Тежестта на едно тяло при плоска Земя да бъде равна на тежестта му при кълбовидна земя, ако е изпълнено равенството $g_{\text{пл}} = g_{\text{к}}$. От сравняването на десните страни на (2) и (3) намираме връзката между дебелината H на "плоската Земя" и радиуса R на кълбовидната Земя при условие, че в двата случая плътността на масите е една и съща:

$$H = \frac{2}{3}R. \tag{4}$$

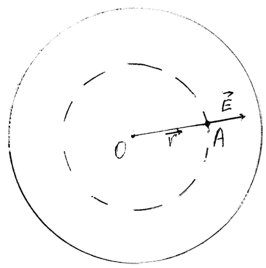
Разбира се, ако плоската земя не е безкрайна плоча, а представлява диск с краен радиус, полученият резултат ще бъде валиден за точки, разположени близо до центъра на диска и далече от ръба му.

Преди да разгледаме втория пример ще припомним резултата от решението на следната електростатична задача:

Колко е интензитетът на полето в сферична кухина, намираща се във вътрешността на кълбо, носещо обемни заряди с плътност k. Разстоянието между центровете на кълбото и кухината е a.

Големината на интензитета на полето в точка, отстояща на разстояние r от центъра на заредено с обемни заряди кълбо се определя по закона на Кулон от заряда, заграден от сфера с радиус r (интензитетът на полето, създадено от зарядите, намиращи се извън тази сфера, е нула по повърхността и във вътрешността ѝ). Когато точката е вътре в кълбото – както т. A от фиг. 2, този заряд е $Q_r = \frac{4}{3}\pi r^3 k$, така че големината на интензитета е:

$$E = \frac{Q_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{k}{3\varepsilon_0} r \; .$$



Фиг. 2.

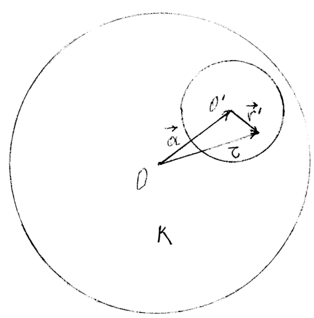
Като отчетем, че полето е радиално и отбележим с $\vec{r}$ радиус-вектора на т. A (вж. фиг. 2), последната формула може да се запише и във векторен вид:

(1)
$$\vec{E} = \frac{k}{3\varepsilon_0}\vec{r} \; .$$

Сега се връщаме към кълбото, в което има кухина (фиг. 3). Може да си представим, че търсеното поле е резултат от наслагването на две полета:

– поле с интензитет $\vec{E}_+$, създадено от заряди с плътност k, изпълващи цялото кълбо, и

– поле с интензитет $\vec{E}_-$, създадено от заряди с плътност $-k$, изпълващи кухината.



Фиг. 3.

Съгласно с формула (1), интензитетите на двете полета в т. A се описват с формулите (вж. фиг. 3):

(2)
$$\vec{E}_+ = \frac{k}{3\varepsilon_0}\vec{r} \qquad \text{и} \qquad \vec{E}_- = -\frac{k}{3\varepsilon_0}\vec{r}\,'.$$

Като отчетем, че $\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{a}$, където $\vec{a}$ е радиус-векторът на центъра O’ на кухината (вж. фиг. 3), от суперпозицията на двете полета за интензитета на полето в кухината получаваме:

(3)
$$\vec{E} = \frac{k}{3\varepsilon_0}\vec{a} \; .$$

Формула (3) показва, че търсеното поле е *хомогенно* и интензитетът му има големина:

(4)
$$E = \frac{k}{3\varepsilon_0} a \; .$$

Чрез аналогията между законите на Нютон и на Кулон веднага можем да посочим отговора и на следната задача:

Задача 2. Колко е ускорението на свободно падане в сферична кухина във вътрешността на Земята, ако разстоянието между центровете на Земята и на кухината е a, а Земята се разглежда като хомогенно кълбо с плътност ρ?

Решение. Съгласно с посочените в началото аналогии ($E \leftrightarrow g$, $k \leftrightarrow \rho$, $G \leftrightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$), гравитационното поле в кухината ще бъде хомогенно, а ускорението на свободното падане там:

$$g = \frac{4\pi}{3}G\rho a = G\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right)\rho\frac{1}{a^2} = G\frac{M_a}{a^2}, \tag{5}$$

където с M_a е означена масата на сферична част от *плътното* земно кълбо радиус a. Изразът в дясната страна на (5) обаче описва точно ускорението на свободното падане върху повърхността на кълбо с радиус a и плътност, равна на земната плътност. Следователно отговорът на поставения в условието на задачата въпрос е:

Гравитационното поле в кухината е хомогенно, с посока от центъра на кухината към центъра на Земята, а ускорението на свободно падане там е колкото ускорението на свободно падане върху повърхността на кълбо с радиус a и плътност – равна на плътността на Земята.[1]

Аналогията между законите на Нютон и на Кулон може да се използва не само за решаване на статични задачи. По-долу разгледаме пример за това, в който известен резултат за движение в гравитационно поле се използва за решаване на задача за движение в електрично поле.

Както и в предишните два случая, един познат факт – в случая третия закон на Кеплер – ще представим във вид, удобен за прилагане когато движението се определя от електрични сили. По-конкретно, ще напомним как законът следва от закона на Нютон за гравитацията[2].

Нека планета с маса m обикаля **по кръгова орбита** с радиус R около звезда с маса M. Когато $M >> m$ можем да смятаме звездата неподвижна и тогава гравитационното привличане, действащо върху планетата, играе роля на центростремителна сила, т.е. е изпълнено равенството:

$$G\frac{Mm}{R^2} = \frac{mv^2}{R}.$$

[1] Този резултат предлага интересен научно-фантастичен сюжет. Представете си, че животът на човечеството върху повърхността на Земята е застрашен (изчезване на озоновия слой, многократно увеличение интензитета на космичното лъчение и др.п.). За да оцелеят, различните човешки общности (напр. градовете) решават да се скрият под земята, като си издълбаят там достатъчно големи кухини, свързани вместо с шосета, с тунели. Съществуват поне две причини за тези кухини да бъде избрана сферична форма: първо, тя осигурява най-голям обем при определена площ на ограждащата повърхност и, второ – условията във всяка кухина биха били като върху повърхността на Земята, т.е. хората биха живели в хомогенно гравитационно поле. Това гарантира в частност, че всички изпуснати или хвърлени тела ще се движат по същия начин, както и тук, на земната повърхност, само ускорението на свободното падане би било по-малко – толкова по-малко, колкото по-близо до центъра на Земята е кухината. (Разбира се, нашият извод бе при предположение, че кухината е *една*, а тук става дума за множество кухини, но можем да смятаме, че броят и размерите им не са такива, че да нарушат условията, при които решихме задачата.)

[2] По-подробният извод е представен напр. в учебното помагало на **В. Голев** *Астрономия за 11. клас*, С., Просвета, 2004 г.

Линейната скорост v на звездата е свързана с периода T на обикалянето й чрез формулата $v = \frac{2\pi R}{T}$. Като заместим израза за v в предишното равенство, след разместване на множителите получаваме равенството:

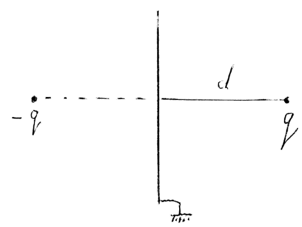
(6) $$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = \text{const}\,.$$

Това не е нищо друго, освен третият закон на Кеплер, но в този вид се вижда и от какво зависи отношението между квадрата на периода T и третата степен на радиуса R. Всъщност, от астрономията знаем, че законът е валиден и когато планетите обикалят по елипси, като в този по-общ случай R е *голямата полуос* на съответната елипса.

Формула (6) позволява да решим следната задача, в която на едно тяло действа не гравитационна, а електрична сила.

Задача 3. Точков заряд q и маса m се намира на разстояние d пред заземена проводяща равнина. За колко време след освобождаването му зарядът ще достигне равнината? Гравитационната сила се пренебрегва.

Анализ. От електростатиката е известно, че зарядът q индуцира върху заземената равнина разноименни заряди. Тяхната плътност е най-голяма в пресечната точка на равнината с перпендикуляра, спуснат от заряда към нея, и намалява с отдалечаването от тази точка. Пак там се доказва, че създаденото от индуцираните заряди поле е като на точков заряд $-q$, разположен на разстояние d от другата страна на равнината. Този факт лежи в основата на известния *метод на огледалните изображения* за решаване на задачи (фиг. 4).



Фиг. 4.

И така, вместо да пресмятаме електричната сила, с която индуцираните заряди привличат q, ние си представяме, че проводяща равнина няма, а големината на търсената сила изразяваме чрез закона на Кулон:

(7) $$F_{el} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 (2x)^2}\,,$$

като с x сме отбелязали разстоянието между движещия се заряд и равнината. Ако запишем изразът за F_{el} във вида:

(8) $$F_{el} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 (2x)^2} = G\frac{\left(\frac{q^2}{4.4\pi\varepsilon_0 Gm}\right)m}{x^2}\,,$$

виждаме, че той е еквивалентен на израза за гравитационната сила, с която тяло с маса:

(9) $$M = \frac{q^2}{4.4\pi\varepsilon_0 Gm}$$

привлича тяло с маса m, разположено на разстояние x от него. При условие, че е изпълнено условието $M >> m$, за движението на тялото с маса m е приложим третият закон на Кеплер във вида (6). Условието ще бъде изпълнено, ако:

$$\frac{M}{m} = \frac{1}{4.4\pi\varepsilon_0 G}\left(\frac{q}{m}\right)^2 >> 1,$$

т.е., ако специфичният заряд на тялото *q/m* удовлетворява неравенството:

$$\frac{q}{m} > 2\sqrt{4\pi\varepsilon_0 G} \approx 10^{-10} \text{ C/kg}.$$

Лесно се проверява, че това неравенство е изпълнено, при това с огромен аванс, не само за елементарни частици (електрон, протон и т.н.), но даже и за наночастици с минимален заряд (равен на елементарния заряд). То е изпълнено и за обикновените леки тела, с които се провеждат демонстрации по електростатика и чиито маси *m* са от порядъка на грам, а зарядите – по-големи от нанокулон. Ето защо можем да смятаме, че във всички практически важни случаи приложимостта на закона на Кеплер за движението на тялото е гарантирана.

Връщайки се към задачата ще използваме, че освободеният заряд се отправя към равнината по перпендикуляра към нея – траекторията му е отсечка с дължина *d*. Тази отсечка може да се разглежда като изродена елипса, т.е. – като елипса с нулев ексцентрицитет. Тъй като голямата ос на "елипсата" е *d*, голямата полуос, която фигурира в закона на Кеплер е *d/*2. И тъй като времето за движение на *q* до равнината е само половината от целия период *T* на "обикаляне по елипсата", от (6) и от (9) за търсеното време получаваме:

$$t_0 = \frac{T}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\pi^2\left(\frac{d}{2}\right)^3}{GM}} = \frac{d\pi}{2}\sqrt{\frac{d}{2G}\frac{4.4\pi\varepsilon_0 Gm}{q^2}} = \frac{\pi d}{q}\sqrt{4\pi\varepsilon_0\frac{d}{2}m}\,. \tag{10}$$

От (10) следва например, че ако един електрон се намира на 20 cm от заземена проводяща равнина (разбира се – във вакуум) и го освободим, под влияние на привличането от индуцираните върху равнината заряди той ще достигне равнината за по-малко от десета част от секундата.

По подобен начин може да се разгледа например и задачата за намиране на времето, за което под действие на електричната сила тяло със заряд *q* и маса *m* би паднало върху тяло със заряд *Q* с маса *M* при начално разстояние между зарядите *d* и условие, че *M* >> *m*.