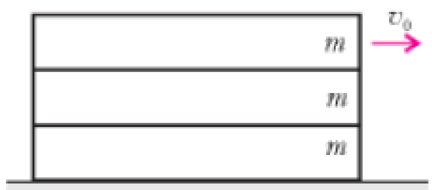
Погрешно решение с верен отговор?!

В [1] е представено решение на следната задача:

На хоризонтална маса едно върху друго лежат неподвижно три дървени трупчета с еднакви маси m (фиг. 1). Контактните повърхности са покрити със смазка, така че силата на триене е пропорционална на относителната скорост на допиращите се тела, като коефициентът на триене k не зависи от нормалния натиск. В един начален момент на най-горното трупче се придава хоризонтална скорост с големина v_0. Да се намерят относителните премествания на трупчетата едно спрямо друго след прекратяване на движенията им.



Фиг. 1.

В решението авторите използват факта, че според условието на задачата, проекцията на силата, с която n-тото трупче действа на $(n + 1)$-вото е:

(1) $$F_n = -k(v_n - v_{n+1}) \qquad n = 1, 2, 3.$$

(Номерацията на трупчетата е отгоре надолу и всички скорости и премествания се отчитат спрямо отправна система, чиято ос Ox има посока на придадената начална скорост, а началото на системата е свързано с неподвижната маса.)

Тогава, в съответствие със закона за промяна на импулса **на** n-тото трупче, авторите записват:

(2) $$\Delta p_n = -k(v_n - v_{n+1})\Delta t = -k(\Delta x_n - \Delta x_{n+1}) = -k\Delta x_n^{rel} \quad n = 1, 2, 3.$$

След сумираме в (2) за всички отмествания:

(3) $$\sum \Delta p_n = -k \sum \Delta x_n^{rel} \qquad n = 1, 2, 3,$$

се отчита, че началният импулс на системата е mv_0, а крайният – нула, и като се използва означението ΔL_n^{rel} за относителното отместване на n-тото трупче спрямо $(n + 1)$-вото, и се получава:

(4) $$0 - mv_0 = -k\Delta L_n^{rel} \qquad n = 1, 2, 3.$$

Оттук окончателно следва:

(5) $$\Delta L_n^{rel} = \frac{mv_0}{k} \qquad n = 1, 2, 3.$$

Изводът: след края на движенията относителното преместване на всяко трупче спрямо лежащото под него е едно и също, т.е. – не зависи от номера на трупчето.

Два пункта будят съмнение в коректността на това решение:

1. Равенство (2) отчита само силата, с която $(n + 1)$-вото трупче действа върху n-тото. Това обаче е вярно само за $n = 1$, за най-горното трупче, върху което действа единствено насочената назад сила, резултат от триенето върху средното трупче. На самото средно трупче действат **две сили** – една, с която го увлича напред горното, и втора – спиращата сила от страна на третото, най-долното трупче. Аналогична е ситуацията и с третото трупче – на него също действат две сили: теглещата го напред сила, с която му действа средното трупче, и препятстващото движението му триене в масата.

Накратко: *на най-горното трупче наистина действа само една сила, но на всяко от другите две трупчета действат по две противоположни по посока сили.*

---

[1] **Лосев В., Плис В.**, *Сила сопротивления в задачах динамики*; Квант, 2009, 1.

2. Равенство (3) е равносилно на три отделни равенства – за $n = 1$, за $n = 2$ и за $n = 3$. Когато сумираме преместванията във всяко от тези три равенства, *само за $n = 1$ можем да пишем, че началният импулс е mv_0, защото началните скорости на второто и третото трупче са нула*! Това хвърля съмнение в справедливостта на (4), от което пък следва най-важният резултат – че относителните отмествания на всяка двойка допиращи се трупчетата не зависят от номерата им.

Тези две съображения са причина да потърсим друго, по-детайлно решение на същата задача. За целта се налага малка промяна в означенията за силите. Нека с

(6, a) $$F_{21} = -k(v_1 - v_2)$$

означим проекцията на силата, с която второто трупче действа на първото (в старите означения – силата F_1). По аналогичен начин с:

(6, b) $$F_{32} = -k(v_2 - v_3)$$

и с:

(6, c) $$F_{03} = -k(v_3 - 0)$$

означаваме съответно силата, с която третото трупче действа на второто, и силата, с която масата действа върху третото трупче (в старите означения – F_2 и F_3).

Равенства (6) описват трите сили, с които всяко по-долно трупче (или масата) действа на хлъзгащото се по него. Според третия принцип на динамиката обаче и по-горните трупчета действат на тези, върху които се хлъзгат, като всяка от тези пък три сили е равна по големина, но обратна по посока на силата, с която долното действа на по-горното. С други думи първото действа върху второто със сила ($-F_{21}$), а второто върху третото – със сила ($-F_{32}$).

При това положение, като отчетем, че на второто и третото трупче действат по две сили, за общата сила, която действа на всяко от трите трупчета намираме изразите:

(7, a) $$F_1 = F_{21} = -k(v_1 - v_2) = k(v_2 - v_3)$$

(7, b) $$F_2 = -F_{21} + F_{32} = k(v_1 - v_2) - k(v_2 - v_3) = k(v_1 - 2v_2 + v_3)$$

(7, c) $$F_3 = -F_{32} + F_{03} = k(v_2 - v_3) - kv_3 = k(v_2 - 2v_3).$$

Оттук, както и в приведеното по-горе решение, за всяко от трупчетата прилагаме втория принцип на динамиката и (като отново означим с $\Delta x_i = v_i \Delta t, (i = 1,2,3)$ всяко от малките премествания за интервала време Δt), получаваме:

(8, a) $$\Delta p_1 = F_1 \Delta t = k(v_2 - v_1)\Delta t = k(\Delta x_2 - \Delta x_1)$$

(8, b) $$\Delta p_2 = F_2 \Delta t = k(v_1 - 2v_2 + v_3)\Delta t = k(\Delta x_1 - 2\Delta x_2 + \Delta x_3)$$

(8, c) $$\Delta p_3 = F_3 \Delta t = k(v_2 - 2v_3) = k(\Delta x_2 - 2\Delta x_3).$$

Следващата стъпка включва сумиране на малките премествания поотделно за всяко равенство (8). За целта означаваме с:

(9) $$\Delta L_1 = \sum \Delta x_1\,, \qquad \Delta L_2 = \sum \Delta x_2 \qquad \text{и} \qquad \Delta L_3 = \sum \Delta x_3$$

преместванията на всяко от трупчетата **спрямо масата** и отчитаме факта, че крайните импулси на трите трупчета, както и началният импулс на второто и на третото е нула, а началният на най-горното – mv_0. Така, след провеждане на сумирането във всяко от равенствата (8), получаваме:

(10, a) $$0 - mv_0 = k(\Delta L_2 - \Delta L_1)$$

(10, b) $$0 - 0 = k(\Delta L_1 - 2\Delta L_2 + \Delta L_3)$$

(10, c) $$0 - 0 = k(\Delta L_2 - 2\Delta L_3).$$

Трите равенства (10) представляват система от три уравнения с три неизвестни – определените в (9) отмествания L_1, L_2 и L_3 на трупчетата. Нейното решение е:

(11) $$\Delta L_3 = \frac{mv_0}{k}, \quad \Delta L_2 = 2\frac{mv_0}{k} \quad \text{и} \quad \Delta L_1 = 3\frac{mv_0}{k}.$$

Оттук се вижда, че относителните премествания на съседните трупчета наистина са равни помежду си:

(12) $$\Delta L_1 - \Delta L_2 = \Delta L_2 - \Delta L_3 = \Delta L_3 - 0 = \frac{mv_0}{k}.$$

(В последното равенство фигурира (–0), защото масата, върху която се хлъзга третото трупче, е неподвижна.)

И така, двата начина за решаване на задачата водят до един и същ резултат. Какво следва оттук? Погрешен ли е първият начин, и ако е погрешен, защо води до правилен резултат? Може би начинът е правилен, но просто не е достатъчно добре обоснован, и затова изглежда погрешен. Или някакви грешки в решението взаимно се компенсират, така че все пак крайният резултат и верен? Или в случая верният отговор е резултат от някаква случайност? Бих бил благодарен, ако някой ми изпрати разсъждения относно отговорите на тези въпроси.

Разгледаната задача е хубава илюстрация на предимствата, които предлага използването на законите за запазване в сравнение с директното решаване на уравненията на движение. Наистина, нека разгледаме най-простата задача от този тип:

Трупче с маса m лежи върху хоризонтална маса. В един момент на трупчето е придадена начална скорост v_0 и то започва да се хлъзга по масата. Поради наличие на смазка големината на силата на триене се описва с формулата $F = kv$, където v е моментната скорост, а k – известна константа. Какъв път ще измине трупчето до спирането си?

В духа на направените по-горе разглеждания за малкия интервал време Δt записваме втория принцип на динамиката във вида:

$$\Delta p = F\Delta t = -kv\Delta t = -k\Delta x,$$

сумираме по всички малки премествания:

$$\sum \Delta p = -k\sum \Delta x$$

и след като отчетем, че началният импулс е mv_0, за изминатия до спирането път намираме:

$$x = \frac{mv_0}{k}.$$

А ето как би изглеждало решението на същата задача чрез решаване на уравнението на движение, за да се получи законът за движение на трупчето. Видът на закона е:

$$m\frac{dv}{dt} = F = -kv \quad \text{или} \quad \frac{1}{v}\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}.$$

Решението на това просто диференциално уравнение, което $t = 0$ има стойност $v(0) = v_0$ се описва с формулата:

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Изненадващото в този резултат е, че според него трупчето ще спре след **безкрайно** дълго време! За намиране на закона за движение трябва да интегрираме още веднъж, като отчетем, че в началното положение координатата x на трупчето е например нула (т.е. – то тръгва от началото на координатната система). В този случай:

$$x(t) = \int_0^t v(t)dt = v_0\int_0^t e^{-\frac{k}{m}t}dt = \frac{mv_0}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

Тъй като движението продължава безкрайно дълго време, за да намерим максималното преместване на трупчето е необходимо в този израз да направим граничен преход $t \to \infty$, при който вторият член в скобата става и наистина получаваме познатия от по-горе израз $x = \frac{mv_0}{k}$.

Сравнението между двете решения недвусмислено показва предимството на първото, но не бива да се забравя, че това предимство е за **тази конкретна задача**, в която се търси **само** общото преместване. Второто решение, водещо до закона за движение, съдържа много по-богата информация, от която може да се получи **всяка** друга интересуваща ни величина, свързана с движението. За съжаление, това второ решение изисква решаване на (макар и най-простото) диференциално уравнение – елемент от висшата математика, недостъпен за ученици в средното училище.