Две задачи за смяна на мащабите

Има задачи, при които едновременната и еднаква по големина смяна на стойностите на всички зададени величини позволява да се вникне по-дълбоко във физиката на явленията. Решаването на подобни задачи задълбочава и разбирането на понятието **размерност** на една величина – важно понятие, което все не намира място в учебните програми и за което ученикът може да си състави представа най-вече чрез решаване на задачи.

По-долу предлагаме две класически задачи, чието решение не изисква знания извън рамките на общозадължителната подготовка в основното училище.

Следи от котки по мокър пясък

Задача. Всички размери (височина, дължина и дебелина) на котката – майка са $n = 3$ пъти по-големи от съответните размери на нейните котета. Кой оставя по-дълбоки следи по мокър пясък – котката или потомците й?

Решение

Дълбочината на следата върху мокрия пясък зависи от налягането, което упражняват върху пясъка лапите на животните. Налягането от своя страна е право пропорционално на силата на тежестта и обратно пропорционално на площта на лапата. За да отговорим на зададения въпрос, трябва да намерим колко по-тежка е котката от котетата и колко пъти площта на лапата й е по-голяма от площта на техните лапи.

Преди всичко да разгледаме как се променя обема на едно тяло, когато всички негови размери се увеличат (или намалят) n пъти. Ако тялото е сфера с радиус R и обем V_0, след увеличението обемът става $V = 4\pi(nR)^3/3 = n^3V_0$. Ако тялото е цилиндър с радиус R, височина H и обем V_0, след увеличаване на размерите обемът става $V = \pi(nR)^2(nH) = n^3V_0$. По подобен начин можем да се убедим, че

когато всички размери на тяло с произволна форма се изменят n пъти, обемът на тялото се променя n^3 пъти.

Грубо казано, котката се състои от сфера (главата) и няколко цилиндъра (тяло, крака и опашка). Според казаното по-горе, обемът на котката–майка е $n^3 = 27$ пъти по-голям от обема на едно от котетата. Като предположим, че средната плътност на една котка не зависи от размерите й, в същото отношение ще се намират както масите, така и силите, с които Земята привлича котката и едно коте, т.е. котката е 27 пъти по-тежка от всяко коте.

Нека сега разгледаме и как се променят площите при промяна на размерите. Ако разглеждаме правоъгълник със страни a, b и площ S_0, след като размерите му се променят n пъти, площта му става $S = (na)(nb) = n^2S_0$. Ако разглеждаме кръг с радиус R и площ S_0, при промяна на радиуса n пъти площта се променя също $S = \pi(nR)^2 = n^2S_0$ пъти. По подобен начин можем да се убедим, че

когато всички размери на една фигура се изменят n пъти, площта на фигурата се променя n^2 пъти.

Съгласно с казаното, площта на лапата на котката е само $n^2 = 9$ пъти по-голяма от площта на лапите на потомството й.

Ако масата на едно коте означим с m, а площта на лапите, с които се опира в пясъка – с S, налягането на котето върху пясъка е:

$$p_0 = \frac{mg}{S} \quad ,$$

където g е земното ускорение. В същото време налягането, което упражнява котката, е:

$$p = \frac{n^3 mg}{n^2 S} = np_0 .$$

И така, котката ще оставя по-дълбоки следи в пясъка, защото стъпките й упражняват върху него n = 3 пъти по-голямо налягане.

Нещо повече. При решаване на задачата говорихме за отношението между масата на котката и масата на потомците й, за отношението между площите на лапите им и т.н. Тези отношения са безразмерни величини, поради което не зависят от единиците, в които ги измерваме. Отношението между обема и повърхнината на едно и също тяло обаче е величина с размерност на дължина и затова зависи от избора на единиците. Така например обемът на куб с ребро 1 m е 1 m^3, а околната му повърхнина – 6 m^2. Отношението между двете величини в този случай е 1/6. Ако обаче мерим дължините в сантиметри, обемът е 10^6 cm^3, а повърхнината – 6.10^4 cm^2 и същото това отношение вече е 16,7, т.е. точно 100 (= 16,7:1/6) пъти по-голямо. Въпреки тази зависимост от единиците, важният факт, че обемът и масата на телата растат с куба на размерите, а техните повърхнини растат с квадрата им, дава възможност за интересни заключения, стига разбира се във всички случаи да използваме едни и същи единици.

Ако обаче d_1 е отношението между обема и повърхнината на едно тяло, а d_2 - същото отношение за друго тяло, то частното d_1/d_2 не зависи от избора на единиците.

Наистина нека едното тяло е куб с ребро 3 m, а другото – куб с ребро 0,3 m. За първия куб въпросното отношение е d_1 = 3^3/6.3^2 = 0,5 m, а за второто – d_2 = 0,3^3/6.0,3^2 = 0,05 m. Частното на двете отношения е d_1:d_2 = 0,5:0,05 = 10. Ако измерваме дължините в дециметри, то d_1 = 30^3/6.30^2 = 5 dm, а d_2 = 3^3/6.3^2 = 0,5 dm. Частното на двете отношения е d_1:d_2 = 5:0,5 =10, т.е. отново 10 и представлява безразмерна величина, т.е. – не зависи от избора на единиците.

Този пример потвърждава, че:

– частното на отношенията между обема (масата) и повърхнината за **две** тела не зависи от избора на единиците;

– когато размерите на телата растат, расте и отношението обем към повърхнина.

Установените зависимости между размери, обем и повърхнини позволяват да се направят интересни качествени разглеждания. Известно е например, че количеството топлина, което едно топлокръвно животно отдава на околната среда за единица време е право пропорционално на повърхнината на тялото му. Така например поради по-голямата повърхнина на тялото си, котката отдава за единица време в околното пространство по-голямо количество топлина, отколкото всяко от котетата. Количеството топлина обаче, отделено вътре в тялото на животното при протичащите в клетките биохимични процеси, е пропорционално (грубо казано) на броя на клетките, т.е. на обема (на масата) на тялото. А обемът расте с куба на размерите, докато повърхнината – само с квадрата им! Според казаното по-горе отношението маса (обем) към повърхнина расте с размерите, т.е. колкото по-едро е едно животно, толкова по-бавно ще отдава то през повърхността си отделеното в тялото му количество топлина. Същото твърдение може да се изкаже и по друг начин – по-дребните животни изстиват по-лесно. Това е една от причините, например, поради която бебетата изстиват много по-бързо и по-лесно от възрастните хора. Заради същата причина един слон или един лъв може да се храни (т.е. да си доставя “гориво”) по-рядко, през по-големи интервали от време, докато за поддържане телесната си температура едно врабче е принудено непрекъснато да търси нещо за ядене.

Коментар. Решението на задачата получихме при предположение, че средните плътности на котката и на котетата са еднакви. Дали това предположение е вярно? Сигурно е, например, че плътностите на костите и на меките тъкани на котката са различни – може би при промяна на размерите относителният принос на тези плътности към средната плътност се променя?

Ние, разбира се, не можем да отчетем точно влиянието на въпросните фактори, но можем да се ориентираме в проблема, като разгледаме един опростен модел.

Да разгледаме тяло, което се състои от две хомогенни части – едната с обем V_1 и плътност ρ_1, другата – с обем V_2 и плътност ρ_2. Средната плътност на това тяло намираме, като разделим общата маса на тялото ($\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2$) с общия обем $(V_1 + V_2)$:

$$\rho = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V_1 + V_2}.$$

От тази формула се вижда, че ако размерите на тялото и на частите му се увеличат едновременно n пъти, и числителят, и знаменателят се увеличават n^3 пъти и средната плътност не се променя. Именно този извод подсказва, че направеното предположение за равенство между средните плътности на котката и котетата е оправдано.

Защо през лятото край фонтаните е прохладно

Един от резултатите на направените в предната задача разсъждения относно отношението обем – повърхност за едно тяло може да се формулира и по следния начин:

Повърхнината на едно тяло е по-малка от сумата на повърхнините на частите, на които можем да го разделим.[1]

Това твърдение обяснява защо в летните жеги около работещи фонтани осезаемо се чувства прохлада – разпръсквайки водата във вид на дребни капки,

[1] За обосноваване на това твърдение не е задължително позоваването на предходната задача – то е ясно и интуитивно. Така например повърхността на куб с ребро a е $6a^2$. Ако срежем куба на две с равнина, успоредна на две от стените му, към предишната повърхнина се добавят площите на още два квадрата, разположени от двете страни на равнината, по която е направен срезът. Така общата повърхнина на двете части става $6a^2 + 2a^2 = 8a^2$.

фонтанът увеличава общата повърхност, от която става изпарение, а, както е известно, при изпарението се отнема количество топлина от околната среда и температурата се понижава.

Да се опитаме да оценим влиянието на размера на водните капки върху общата площ, от която става изпарението.

Задача. Колко пъти се увеличава общата площ на определен обем вода при разпръскването й на капки?

Р**ешение**

Нека изхвърлената от фонтана за единица време вода има обем V. Ако тази вода можеше да приеме сферична форма, радиусът й R би бил свързан с обема чрез познатата формула $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, или:

(1) $$R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}.$$

Повърхнината на тази (очевидно гигантска) "капка" е:

(2) $$S = 4\pi\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Когато водата се разпръсне във вид на N малки капки, обемът на всяка от тях става V/N, а повърхнината й, съответно:

(3) $$S' = 4\pi\left(\frac{3V}{4\pi N}\right)^{\frac{2}{3}} = SN^{-\frac{2}{3}}.$$

Общата повърхнина на всички капки е:

(4) $$S_N = NS' = SN^{\frac{1}{3}}.$$

А как броят N на капките зависи от размера им? Да предположим, че радиусът на една от малките капки е $1/n$ част от радиуса на голямата, т.е. $R' = R/n$. Тогава обемът на малката капка ще бъде $V' = V/n^3$ и следователно броят на капките е:

(5) $$N = \frac{V}{V'} = n^3.$$

От съпоставянето на формулите (5) и (4) се вижда, че общата площ на малките капки е n пъти по-голяма от площта на голямата капка. Така, ако водата, изхвърлена за 1 s от фонтана може да изпълни сфера с диаметър 1 dm, а дюзите на фонтана раздробяват водата на 1000 пъти по-малки капки, т.е. на капки с диаметър 0,1 mm, с това и площта, от която протича изпарението, се увеличава също 1000 пъти.