Къде пада снегът от покрива
(или – как разсъждават физиците)

През 2002 г. списание The Physics Teacher под заглавие "Хлъзгане от покрив: как точката на приземяване зависи от наклона?" публикува задача[1] за определяне при какъв наклон на покрива на едно здание хлъзгащият се по покрива сняг ще падне най-далеч от основите на зданието. Тъй като авторите включват в разглежданията и силата на триене, теоретичното разглеждане на проблема е относително сложни. Статията би могла да заинтересува читателите с това, че в нея се предлага вариант за интересно лабораторно упражнение, което може да се проведе в училищни условия.

Задачата ни заинтересува с възможностите, които дава за прилагане на два любими метода за качествен анализ: *метода на размерностите* и *метода на екстремните стойности* (при това задачата дава възможност методът на екстремните стойности да се приложи *двукратно*!). За метода на размерностите може да се прочете на много места, включително и при решаването на някои от включените в тази колекция задачи. Методът на екстремните стойности се илюстрира идеално със стария анекдот за физика–теоретик, който трябвало да определи стабилността на една маса с четири крака. Теоретикът бързо решил проблема за маса с един крак и за маса с безброй много крака, след което цял живот се трудил над случая на крайно $n \neq 1$. За разлика от случая с масата, ние ще използваме метода, за да докажем съществуването на решение на задачата, след което ще търсим начин и да го намерим.

Животът около нас предлага множество ситуации, удобни за съставяне на интересни физични задачи. Много подобни задачи срещаме в сборниците и чрез решаването им успешно се постигат разнообразни цели на обучението по физика. Има обаче и такива ситуации, които въпреки привидната си простота, не фигурират в нито един сборник. Една ситуация от този вид е споменатата по-горе: мокър сняг се хлъзга от покрива и пада на земята. Задавали ли сте си въпроса при какъв наклон на покрива снегът ще падне най-далеч от основите на зданието? В случая и законите, които трябва да се използват в решението са ясни, и видът им не е сложен. Преобразованията при прилагането им обаче водят до математически проблеми, които са нерешими със средствата на училищната математика (най-често алгебрични уравнения от по-висока степен, необходимост от използване на диференциално и интегрално смятане и др.п.) Както ще установим, задачата за хлъзгащия се сняг е точно от този тип. Днес обаче наличието на компютри в училищата отстранява причините, поради които до сега се отказвахме от разглеждането на подобен тип задачи. Нещо повече – то предоставя идеални възможности за съчетаване на знанията по физика с уменията, придобити по информационни и комуникационни технологии.

С цел опростяване на разглежданията ще смятаме, че снегът се хлъзга по покрива без триене, така че условието на задачата изглежда по следния начин.

Задача. Тяло (сняг) се хлъзга без начална скорост и без триене по наклонена плоскост (покрив на здание) с дължина L, която сключва ъгъл α с хоризонта.

---

[1] **W. H. van den Berg, A. R. Burbank**, The Physics Teacher, 2002, **40,** 2, p. 84

Долният край на плоскостта е на височина H над земята (основата на зданието). При какъв ъгъл α далечината на полета на тялото в хоризонтална посока ще бъде максимална?

Качествен анализ. На пръв поглед задачата е достатъчно проста – трябва да намерим израз за търсеното разстояние x и да търсим максимума му по отношение на α (фиг. 1). Както ще се убедим, намирането на такъв израз е наистина елементарно, за разлика от намирането на максимума.

Нека първо видим до какви изводи може да доведе един предварителен *анализ на размерностите*. В условието на задачата фигурират три параметъра: дължината на покрива L, височината на зданието H и ъгълът α. Разбира се, трябва да смятаме зададен и четвърти параметър – земното ускорение g, чиято размерност е $[g] = [\mathrm{L}][\mathrm{T}]^{-2}$. Доколкото търсената стойност α_0 на наклона е **безразмерна** величина, анализът на размерностите показва, че α_0 би могло да зависи само от безразмерното отношение $\xi = H/L$. Наистина, тъй като времето фигурира само в размерността на земното ускорение, никаква комбинация от параметрите L, H и g не може да бъде безразмерна. Следователно отговорът не може да зависи от g. Нещо повече – от същите съображения следва, че при произволен наклон самата далечина на полета не може да зависи от земното ускорение, което е в известен смисъл неочаквано заключение.

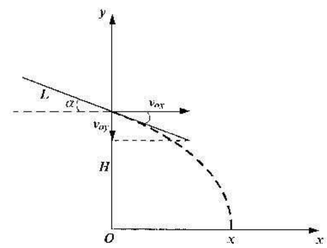
Второ, нека с помощта на *метода на екстремните ситуации* докажем, че като функция от ъгъла α, разстоянието x наистина притежава максимум. Първо ще отбележим, че тъй като дължината на покрива е фиксирана (L), скоростта v, с която снегът достига долния му ръб и започва падането във въздуха, зависи от наклона α. От физична гледна точка ситуацията е елементарна: v е най-голяма при много стръмен покрив и почти нула – при почти хоризонтален покрив.

Едната екстремна стойност на ъгъла е $\alpha \to 90\,°$ (много стръмен покрив). В този случай снегът започва падането във въздуха с максимална начална скорост, но тя е насочена почти вертикално надолу и очевидно той ще падне при самата основа на зданието (т. е. $x \to 0$), т.е. той просто се "забива" в земята.

Подобно е положението и в другия екстремен случай – при $\alpha \to 0\,°$ (почти хоризонтален покрив). Сега началната скорост на падане на снега клони към нула, падането е свободно и хоризонтално отклонение няма, т.е. отново $x \to 0$.

От тези разсъждения следва, че има някаква (поне една) междинна стойност на наклона α, при която далечината на полета е максимална. Това заключение по-нататък играе важна роля, защото гарантира, че уравнението, което ще получим за ъгъла α има поне едно решение в интервала $0\,° – 90\,°$. Както обикновено обаче, доказателството за съществуване на решение не дава представа нито за стойността на решението, нито за начина на намирането му. То може да се намери само при едно количествено разглеждане на ситуацията.

Количествено решение. Израз за разстоянието x, на което ще падне тялото (снегът), намираме лесно с помощта на фиг. 1. Ако отчитаме потенциалната енергия на тялото от равнището на долния край на наклонената плоскост, в началото на движението стойността ѝ е $mgL\sin\alpha$. Чрез приравняване на този израз към кинетичната енергия, когато тялото се откъсва от покрива:



Фиг. 1.

$$mgL\sin\alpha = \frac{mv_0^2}{2},$$

получаваме възможност да определим големината на началната скорост v_0 при падането във въздуха:

(1) $$v_0 = \sqrt{2gL\sin\alpha}\,,$$

както и нейните съставящи:

(2) $$v_{0x} = \cos\alpha\sqrt{2gL\sin\alpha}$$

(3) $$v_{0y} = -\sin\alpha\sqrt{2gL\sin\alpha}\,.$$

Ако приемем t = 0 в началото на падането, за закона на движение на тялото получаваме:

(4) $$x = tv_{0x} = t\cos\alpha\sqrt{2gL\sin\alpha}$$

(5) $$y = H + tv_{0y} - \frac{1}{2}gt^2 = H - t\sin\alpha\sqrt{2gL\sin\alpha} - \frac{1}{2}gt^2.$$

От (5) при y = 0 намираме момента t', в който тялото пада на земята. Като заместим получения израз за t' в (4), за далечината на полета намираме:

(6) $$x = 2L\cos\alpha\left(\sqrt{\sin^4\alpha + \xi\sin\alpha} - \sin^2\alpha\right),$$

където сме използвали въведения по-горе безразмерен параметър $\xi = H/L$. От (6) се вижда, че анализът на размерностите не подвежда – x наистина не зависи от g!

"Неприятностите" започват, когато започнем да търсим екстремумите на x по отношение на α: след като приравним към нула производната на (6) по α и изразим всички събираеми чрез $\sin\alpha$, получаваме уравнение от твърде висока степен:

(7) $$12\sin^5\alpha + 9\xi\sin^4\alpha - 8\sin^3\alpha - 6\xi\sin^2\alpha + \xi = 0.$$

В такъв случай в училище бихме казали, че "задачата няма решение". Всъщност ние знаем, че решение има винаги, но с тези думи подсказваме, че не сме забравили теоремата, според която няма обща формула за корените на алгебрично уравнение със степен, по-висока от четири. Разбира се, това не означава, че за някои конкретни уравнения от пета или по-висока степен не могат да се намерят подобни формули. Затова не би било удивително, ако някой, който е по-изкушен в математическите проблеми, може да каже доста неща за корените на уравнението (7) или дори – да го реши.

За да можем да продължим, първо ще опростим писането, като въведем спомагателната променлива:

(8) $z = \sin\alpha \qquad 0 < z < 1$

и с нейна помощ записваме (7) във вида:

(9) $$4z^3(3z^2 - 2) + \xi(3z^2 - 1)^2 = 0.$$

Оттук нататък отново започват разсъждения в стила "физик–теоретик търси стабилността на маса с един и с безброй много крака", т.е. повторно ще приложим метода на екстремните стойности, но този път по отношение на параметъра ξ. Ще опитаме да извлечем някаква информация относно положението на максимума при двете екстремни стойности на параметъра ξ, от който зависи решението, т.е. ще разгледаме случаите $H/L >> 1$ и $H/L << 1$.

а) Нека $\xi = H/L >> 1$, т. е. височината на зданието е много по-голяма от дължината на покрива (или, по реалистично, когато снегът тръгва не от върха на покрива, а от точка, близка до долния му ръб). Тъй като стойностите на първото събираемо в лявата част на (9) са ограничени, можем да го пренебрегнем и уравнението ще бъде удовлетворено при $3z^2 - 1 = 0$, т.е. в този случай:

(10) $$z' = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}5773\ .$$

Следователно максимална далечина на полета в този случай се получава при наклон на покрива $\alpha' = \arcsin 0{,}5773 \approx 35\ °$.

Този резултат бихме могли да получим и много по-бързо, ако първо се бяхме замислили над физическата ситуация. При късо засилване по покрива ($L << H$) вертикалната съставяща на скоростта в началото на свободния полет ще бъде малка спрямо скоростта, която тялото придобива от земното ускорение по време на самия полет. Това означава, че времето на полета не зависи от тази начална вертикална скорост и практически се определя само от H, т.е. – както при свободно падане. При това положение далечината на полета ще бъде максимална, когато е максимална хоризонталната съставяща на скоростта (2). А намирането на максимума на v_{0x} е много по-лесно и води отново до (10).

Като имаме предвид получената стойност за α', от (6) за максималната далечина на полета в този случай получаваме:

(11) $$x' \approx 1{,}24\sqrt{LH}\ .$$

Ако положим $z = \frac{1}{\sqrt{3}} + \varepsilon$ и се върнем към уравнение (9), лесно можем да получим и първата поправка спрямо z' и т. н.

б) Нека $\xi = H/L << 1$, т. е. височината на зданието е много по-малка от дължината на покрива. Тъй като в (9) множителят зад ξ е ограничен (не забравяйте: z е някакъв синус, т.е. по модул не надмината 1!), при пренебрежимо малко ξ уравнението има решение, когато $3z^2 - 2 = 0$, т.е. при:

(12) $$z'' = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}8165.$$

Следователно максимална далечина на полета в този случай се получава при наклон на покрива $\alpha'' = \arcsin 0{,}8165 \approx 55\ °$.

Ако отчетем в (6), че $\xi << 1$ и запазим само линейните по отношение на ξ членове, за максималната далечина на полета получаваме:

(13) $$x'' = H\mathrm{cotg}\alpha.$$

Този резултат е също разбираем от физична гледна точка: при малка височина времето за свободния полет е твърде кратко и тялото лети почти по права линия. (Интересно е дали и резултатът (12) може да се получи чрез подобни прости съображения?!)

Ако в (13) заместим получената стойност за α’’, намираме:

(14) $$x'' = \frac{H}{\sqrt{2}} = 0{,}7071H.$$

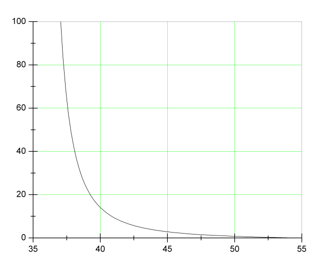
В рамките на това приближение далечината на полета не зависи от дължината на покрива. Отново чрез полагане $z = \sqrt{\frac{2}{3}} + \varepsilon$ можем да търсим следващото приближение към интересуващия ни корен на (9) и т. н.

Дотук свършихме това, което теоретикът направил, като решил задачата за стабилността на маса с един крак и с безброй много крака. Как да постъпим обаче, като знаем, че освен безкрайно високи и безкрайно ниски здания има и нормални, за които ξ не е нито нула, нито безкрайност. В този случай не можем да предложим аналитичен израз за α като функция на ξ, но можем да използваме един метод, който вече веднъж бе приложен при решаване на друга задача[2] и който стана възможен най-вече след навлизането на персоналните компютри в ежедневието ни.

Методът се състои в следното. Вместо да съжаляваме, че не сме в състояние да решим (9) и да намерим α като функция на ξ, се възползваме от факта, че обратното е елементарно – решаваме уравнението спрямо ξ и го изразяваме като функция на α:

(15) $$\xi = \frac{4z^3\left(2-3z^2\right)}{\left(1-3z^2\right)^2} = \frac{4\sin^3\alpha\left(2-3\sin^2\alpha\right)}{\left(1-3\sin^2\alpha\right)^2}$$

След това, или като използваме подходящ софтуерен продукт, или като даваме на α стойности в интересуващия ни интервал от 35 ° до 55 °, пресмятаме съответните стойности на ξ и с тяхна помощ строим графика на обратната функция ξ = $F(z)$ (фиг. 2). По абсцисната ос са нанесени стойностите на ъгъл α (ние вече знаем, че максимумът лежи между 35 º и 56 º). За получаване графиката на тази и на следващите фигури сме използвали програмата Origin6.1.

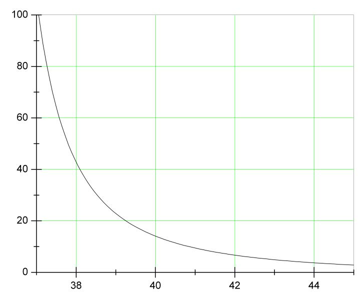


Фиг. 2.

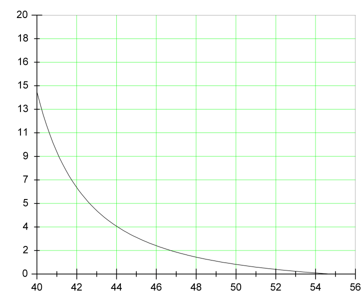
По графиката, при зададено ξ, т. е. при зададено отношение между височината на сградата и дължината на покрива, можем да определим стойността на търсения ъгъл α, при който далечината на полета е максимална.

[2] Попов Хр. Защо в сборниците няма такава задача? – 2, Физика, 2003, кн. 2.

Видът на графиката показва обаче, че мащабите в нея не са подходящи за определяне на ъгъла при приемливи стойности на ξ. За целта е по-удобно интервалът на ъглите да се стесни – напр. за $37° \leq \alpha \leq 45°$ (фиг. 3) или даже още повече – за $40° \leq \alpha \leq 56°$ (фиг.4). От фиг. 4 се вижда например, че ако височината на сградата е 6 пъти по-голяма от дължината на покрива (т. е. при $\xi = \frac{H}{L} = 6$), максимална далечина на падането се получава при ъгъл $\alpha \approx 43°$.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

От фиг. 4 вече доста точно може да се определи търсеният ъгъл α за доста широк интервал от стойности на отношението $\xi = H/L$.

Разбира се, предложеният метод за използване на компютърен софтуер е един от най-простите. Използването на други програми може да даде и по-точни, и в друго представяне резултати.

Тема за размисъл. Разгледаният проблем е реалистичен само на пръв поглед. Ако човек строи къща и търси при какъв ъгъл между покрива и хоризонта снегът ще пада максимално далеч от основите, задачата е малко по-различна. Причината се крие във факта, че на практика се задава не дължината L на покрива, а дължината на проекцията му върху хоризонтална равнина. Това означава, че вместо L, като фиксирана трябва да се разглежда величината $a = L\cos\alpha$. При това положение в равенство (6) вместо параметъра $\xi = H/L$ следва да се въведе нов параметър $\eta = H/a$, т. е. да се положи $\xi = \eta\cos\alpha$. Това съществено променя пресмятанията. Помъчете се да разгледате и този случай.