“Недолёт – перелёт ...”

Навярно някои от по-възрастните колеги все още помнят стиховете от една песен на незабравимия Висоцки, включена в неговия песенен цикъл, посветен на боевете през Великата отечествена война:

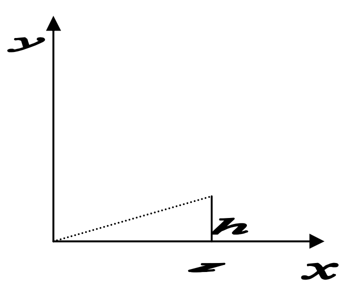
“Недолёт – перелёт,
недолёт – перелёт,
наша артиллерия
по нашим бьет.”

Навярно, също така, не един физик се е досетил, че от тези стихове може да се извлече интересна физична задача. Задача, която дава възможност за интересен качествен анализ, който може да бъде последван от съответното количествено разглеждане.

Тъй като задачата е от по-особен тип, преди да я формулираме ще обърнем внимание на една специфична класификация на задачите по физика – класификация по вида на отговора. Отговорът на най-често срещаните задачи представлява число (или съвкупност от няколко числа). Число, което зависи от стойностите на определен брой зададени в условието на задачата величини. Резултатът от решението на друг тип задачи може да зависи не само количествено, но и **качествено** от някакъв параметър. Тогава отговорът е не число, а представлява цял интервал от стойности за параметъра, в който интервал резултатът е от определен вид. Още по-сложни са задачите, при които резултатът зависи не от един, а от два (или повече) параметъра. Тогава видът на резултата се определя не от интервал стойности, а от някаква област в равнината, чиито точки имат за координати стойностите на тези два параметъра. Именно към задача от този тип навеждат мисълта цитираните стихове на Висоцки.

Нека “формализираме” ситуацията:

Задача: Върху хоризонтална равнина, на разстояние l от оръдие се намира кула с височина h (фиг. 1). Какви са възможните резултати от обстрела на кулата в зависимост от началната скорост v на снаряда и от началния ъгъл α, под който той излита спрямо хоризонта? Земното ускорение е g, съпротивлението на въздуха се пренебрегва.



Фиг. 1

Качествен анализ: Ясно е, че за някои стойности на параметрите v и α снарядът няма да достига целта (недолёт), при други – ще минава над нея (перелёт). С други думи, в духа на казаното по-горе, възможни са три *качествено* различни резултата от стрелбата: снарядът не достигане целта, поразява я и – прелита над нея. Целта е в една координатна система с оси, по които нанасяме стойностите на v и α, да определим областите за тези параметри, при които се реализира всеки от тези резултати. Ъгълът α сам по себе си е безразмерна величина, която се изменя в интервала $0 < \alpha < \pi/2$. В хода на решаване на задачата ще се окаже, че вместо скоростта v е по-удобно да използваме друг, също безразмерен параметър.

За качественото решение на задачата е достатъчно да използваме две твърдения:

– когато при фиксиран начален ъгъл α увеличаваме началната скорост v, както далечината на полета, така и максималната височина на издигане на снаряда растат;

– когато при фиксирана големина на началната скорост v увеличаваме началния ъгъл α, далечината на полета,започвайки от 0, в началото расте, при α = 45º достига максимум, и при по-нататъшно нарастване на ъгъла намалява отново до 0.

Първото от тези твърдения е интуитивно ясно, а второто е известно от елементарните задачи за движение на тяло, хвърлено под ъгъл спрямо хоризонта.

При фиксирана стойност на един от параметрите и промяна на другия са възможни различни *сценарии* за резултата от стрелбата.

Да разгледаме **първо** случая на стрелба при **фиксиран начален ъгъл** и нарастваща скорост на снаряда. В зависимост от стойностите на началния ъгъл възможните сценарии са два:

Сценарий А) – когато началният ъгъл е по-малък от ъгъла α_0, под който от оръдието се вижда върхът на кулата:

– при малки *v* снарядът пада на земята преди да стигне кулата ("недолет");

– с постепенното увеличаване на *v* стигаме стойност, при която снарядът пада в основата на кулата. Оттук нататък при всяка по-голяма от тази скорост снарядът поразява целта.

Сценарий B) – когато началният ъгъл е по-голям от ъгъла α_0, под който от оръдието се вижда върхът на кулата:

– при малки начални скорости снарядът не достига кулата;

– с постепенното увеличаване на *v* стигаме стойност, при която снарядът пада в основата на кулата. При по-нататъшно нарастване на *v* снарядът поразява кулата на все по-голяма височина над земята (Дотук двата сценария съвпадат.);

– при продължаващо нарастване на *v* се достига стойност, при която снарядът поразява върха на кулата. При още по-големи начални скорости снарядът прелита над кулата ("перелет").

Вторият тип сценарии са осъществяват при стрелба с **фиксирана по големина начална скорост**, но различен начален ъгъл. Тук възможните сценарии са три:

I сценарий: когато големината на началната скорост е недостатъчна, независимо от началния ъгъл снарядът не достига кулата ("недолет").

II сценарий: при стойност на началната скорост над тази, при която снарядът може да достигне кулата, но не много голяма:

– при малки начални ъгли снарядът не достига кулата;

– при по-големи начални ъгли снарядът поразява кулата;

– при още по-големи начални ъгли снарядът отново не достига кулата, защото е надминат ъгълът от 45º на максимална далечина на полета.

III сценарий: при много големи начални скорости:

– при малки начални ъгли, въпреки голямата скорост, снарядът не стига целта;

– при нарастващ начален ъгъл, в определен интервал от стойности за α снарядът поразява целта;

– при α над този интервал снарядът прелита над кулата;

– при α > 45º, когато с увеличаване на ъгъла далечината на полета намалява, отново се достига някакъв по-тесен от предишния интервал за α, при който целта отново се поразява (по-тесен, защото сега скоростта на снарядът сключва по-малък ъгъл с вертикалата);

– при α близък до 90º снарядът отново не долита до кулата.

Тези случаи и съответните им подслучаи наистина изчерпват всички възможности. Ясно е обаче, че на въпроси от типа какво означават изрази "малък начален ъгъл", "много големи начални скорости" и т.н. може да отговорим само след като решим задачата количествено.

Количествено решение:

Да запишем закона за движение на снаряда:

(1) $$x = vt\cos\alpha$$

(2) $$y = vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 .$$

Като изключим времето от тези равенства, получаваме уравнението на траекторията:

(3) $$y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{g}{2v^2\cos^2\alpha}x^2 .$$

Две са граничните траектории, които разграничават трите качествено различни резултата от стрелбата: едната, при която снарядът попада в основата на кулата (т.е. за която е изпълнено условието $y(l) = 0$), другата – при която попада във върха й (за нея $y(l) = h$). От (3) за тези два случая получаваме:

$$0 = l\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{g}{2v^2\cos^2\alpha}l^2$$

$$h = l\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{g}{2v^2\cos^2\alpha}l^2 .$$

Ако въведем безразмерния параметър:

(4) $$\lambda = \frac{gl}{v^2} ,$$

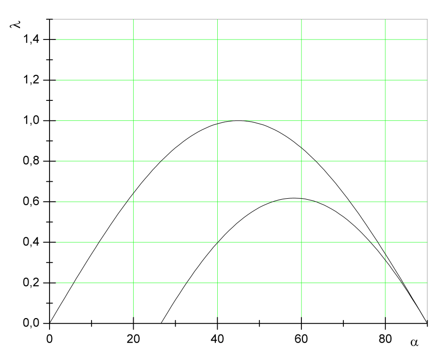
след преобразуване последните две равенства може да се запишат във вида:

(5) $$\lambda = \sin 2\alpha$$

(6) $$\lambda = \sin 2\alpha - 2\frac{h}{l}\cos^2\alpha .$$

Както и следва да се очаква от физични съображения, първата от двете траектории не зависи от височината на кулата.

На фиг. 2 са показани графиките на функциите, задавани с равенства (5) и (6). Както отбелязахме по-горе, интервалът, в който се изменя ъгълът α е $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Защо стойностите на параметъра λ са ограничени в интервала (0, 1,5) ще стане ясно след анализа на кривите. (За отношението h/l на фигурата е приета стойност 0,5. Тъй като $\frac{h}{l} = \mathrm{tg}\,\alpha_0$, тази стойност съответства на ъгъл $\alpha_0 = 26{,}6^\circ$, под който от оръдието се вижда върхът на кулата.)



фиг. 1.

Горната крива (графиката на (5)) дели равнината (α, λ) на две области. Над кривата се намират точките (т.е. са стойностите на началната скорост и на началния ъгъл), при които снарядът не стига основата на кулата-цел. (Обърнете внимание, че, в съответствие с полагането (4), на големи λ отговарят малки начални скорости!) Минималната начална скорост, с която може да бъде достигната основата на целта е при $\alpha = 45^o$ и от графиката се вижда, че стойността й се получава при $\lambda = 1$, т.е. $v_{\min} = \sqrt{gl}$. Тази стойност е от порядъка на скоростта, която придобива свободно падащо от височина l тяло ($\sqrt{2gl}$). При $\lambda > 1$ равенство (5) не може да се удовлетвори, което обяснява избора на мащаб по вертикалната ос.

От същата крива се вижда, че за всяка друга начална скорост, по-голяма от $v_{\min}$, съществуват две стойности на началния ъгъл, при които снарядът попада в основата на кулата – факт, познат от елементарните разглеждания на движение на тяло, хвърлено под ъгъл спрямо хоризонта.

Втората, вътрешната крива (графиката на функцията (6)), по подобен начин дели равнината на две части. Областта под кривата загражда точките, съответстващи на начални скорости и ъгли, при които снарядът прелита над кулата. Над тази крива са точките, при които снарядът или удря кулата, или не долита до нея.

И така, точките:

– над горната крива съответстват на “недолет”;

– под долната крива съответстват на “прелет”;

– между двете криви съответстват на попадение в целта.

С помощта на графиките лесно могат да се проследят сценариите, описани при качествения анализ на задачата:

Първи случай – стрелба при **фиксиран начален ъгъл**:

Сценарий А) – $\alpha < 26{,}6^o$. Като следим отгоре-надолу вертикалната права, съответстваща примерно на 20^o виждаме, че за стойности на λ, по-големи от 0,65, снарядът не долита до целта (това число определя какво в случай означава малка начална скорост). При λ по-малко от 0,65 вече точката лежи между двете криви, т.е. в този случай целта е поразена.

Сценарий В) – $\alpha > 26{,}6^o$. Като следим отгоре-надолу вертикалната права, съответстваща примерно на 60^o виждаме, че за стойности на λ, по-големи от 0,88, снарядът не достига целта. При $0{,}88 > \lambda > 0{,}61$ точката е между двете криви – целта е поразена, а при $0{,}61 > \lambda$ точката е под долната крива – снарядът прелита над кулата.

По аналогичен начин можем да проследим втория тип сценарии, при които е **фиксирана началната скорост** (т.е. параметъра λ).

I сценарий: $\lambda > 1$ – поради недостатъчна скорост снарядът не долита до целта при никакъв начален ъгъл (точките се намират над горната крива).

II сценарий: примерно $\lambda = 0{,}8$:

– при $\alpha < 27^o$ снарядът не достига целта;

– при $27^o < \alpha < 65^o$ точката е между двете криви – целта е поразена;

– при $65^o < \alpha$ – снарядът отново не достига целта.

III сценарий: примерно $\lambda = 0{,}2$ (т.е. – много голяма скорост):

– при $\alpha < 6^o$ снарядът (въпреки голямата скорост) не достига целта;

– при $6^o < \alpha < 33^o$ точката е между двете криви – целта е поразена;

– при $33^o < \alpha < 84^o$ точката е под долната крива – “прелет”;

– тъй като при $\alpha > 84^o$ двете криви са много близки, за да се определи малкият интервал за α, при който целта е отново поразена, трябва да се изчертаят по-детайлно графиките – примерно само в интервала (80^o, 90^o);

– при $\alpha > 85^{\circ}$ точките отново са над горната крива, т.е. отново, въпреки голямата скорост, имаме “недолет”.

Кой сценарий ще се осъществи зависи от стойността на началната скорост. От фиг. 2 се вижда, че съществуват две критични нейни стойности, при която се сменя типът на възможните “сценарии”: това са максимумите на двете криви. Вече намерихме, че максимумът на първата крива, т.е. стойността на първата критична скорост, се определя от формулата $v_{\min} = \sqrt{gl}$. Максимумът на втората крива се намира по известните правила, като се определи онази стойност на α, при която $\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\alpha} = 0$ и тази стойност се замести в (6). Оттам, с помощта на (4) намираме, че квадратът на тази критична стойност е $v_{\min}^{'2} = \frac{gl^2}{\sqrt{l^2+h^2}-h} = v_{\min}^2 \frac{l}{\sqrt{l^2+h^2}-h}$. Ако се ограничим до малки величини от първи порядък спрямо отношението h/l, последният множител можем да представим във вида:

$$\frac{l}{\sqrt{l^2+h^2}-h} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{h}{l}\right)^2}-\frac{h}{l}} \approx \frac{1}{1+\frac{1}{2}.\left(\frac{h}{l}\right)^2-\frac{h}{l}} \approx \frac{1}{1-\frac{h}{l}} \approx 1+\frac{h}{l}.$$

В този случай се оказва, че отношението между двете критични скорости зависи само от параметъра h/l и е приблизително равно на:

$$\frac{v_{\min}^{'}}{v_{\min}} \approx \sqrt{1+\frac{h}{l}} \approx 1+\frac{1}{2}.\frac{h}{l}.$$

Когато става въпрос за стрелба с оръдие, примерът, който илюстрирахме с фиг. 2, не е много реалистичен: отношението $\frac{h}{l} = 0{,}5$ е твърде голямо и бе избрано такова само, за да се разграничат добре двете криви. Той отговаря повече на случаи, когато примерно хвърляме топка от разстояние l срещу стена с височина h. Ако обаче начертаем съответните криви за един реалистичен случай за стрелба с оръдие (например, когато трябва да се порази здание с височина 30 m от разстояние 3 km, т.е. при $\frac{h}{l} = 0{,}01$), двете криви се оказват много близки, което означава, че оръдието трябва да се насочва твърде точно.

Разгледаният метод за разграничаване на различни типове резултати (“сценарии”) от физични процеси чрез диаграми в равнинна (двупараметрична) координатна система може да се прилага и в много други случаи.

Вариант. По подобен начин може да се реши и следната задача:

В какви интервали трябва да бъдат началният ъгъл и началната скорост, така че далечината на полета на хвърлено копие да бъде в границите от 50 m до 60 m?

В този случай обаче възможните “сценарии” са значително по-малко и затова – по-безинтересни, отколкото, когато целта е вертикална.