Една задача, която би могла да спомогне за развиване способност за интуитивна оценка на средната скорост

Че стойността на средната скорост на едно движение е някъде между стойностите на минималната и максималната скорости, е ясно. Следната задача обаче би могла да спомогне да изградим малко по-детайлна представа за това, от какво зависи средната скорост. Формулировката е като на задачата с избираем отговор, но изборът на верния измежду тях изисква решение с общи числа, поради което е подходяща за осмокласници с интерес към физиката и склонност към абстрактно мислене.

Задача. Колоездач изминава разстоянието между градовете A и B със средна скорост v_1, след което се връща, но поради умората вече средната му скорост v_2 е по-малка ($v_2 < v_1$). Ако с $v_{\text{ср.}}$ означим средната скорост на цялото пътуване от A до B и обратно, кое твърдение е вярно?

А) $v_{\text{ср.}} = \dfrac{v_1 + v_2}{2}$.

Б) $v_{\text{ср.}}$ е по-малко от v_1 и по-близко до v_2.

В) $v_{\text{ср.}}$ е по-голямо от v_2 и по-близко до v_1.

Г) Отговорът зависи от разстоянието между градовете.

Решение. Решението може да се получи само след като $v_{\text{ср.}}$ се изрази посредством v_1 и v_2, след което се намерят съответните разлики.

Ако означим с s разстоянието между градовете, времената за изминаване на разстоянието между тях в двете посоки са съответно:

(1) $$t_1 = \frac{s}{v_1} \text{ и } t_2 = \frac{s}{v_2},$$

а общото време за изминаване на разстоянието $2s$ е:

$$t = t_1 + t_2 = s\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right).$$

При това положение средната скорост на цялото движение е:

(2) $$v_{\text{ср.}} = \frac{2s}{t} = \frac{2}{\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)}.$$

Този израз показва, че отговорите **А)** и **Г)** не са верни – средната скорост не е средно аритметично от двете скорости и не зависи от разстоянието между градовете. За да открием верния, пресмятаме разликите $v_1 - v_{\text{ср.}}$ и $v_{\text{ср.}} - v_2$:

$$v_1 - v_{\text{ср.}} = \frac{\frac{v_1}{v_2} - 1}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} \quad \text{и} \quad v_{\text{ср.}} - v_2 = \frac{1 - \frac{v_2}{v_1}}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}.$$

Веднага се вижда, че разликата между първата и втората величина е положителна $\left\{ (v_1 - v_{\text{ср.}}) - (v_{\text{ср.}} - v_2) = \dfrac{\frac{v_1}{v_2} + \frac{v_2}{v_1}}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} > 0 \right\}$, което показва, че средната скорост в този случай (равни разстояния за движенията напред и назад!) е винаги по-близка да по-малката от двете скорости и не зависи от разстоянието, т.е. – верният отговор е **Б)**.

Варианти. Както почти винаги, и тук може да се търсят усложнения. Ето един вариант, който очевидно е провокиран от току що решената задача.

Задача. Колоездач изминава разстояние s_1 със средна скорост v_1, след което изминава разстояние s_2 със средна скорост v_2 ($v_2 < v_1$). **1)** Възможно ли е така да се подбере съотношение между s_1 и s_1, че общата средна скорост $v_{\text{ср.}}$ ще бъде равна на средно аритметичното между v_1 и v_2? **2)** При какво съотношение между разстоянията общата средна скорост ще бъде по-близка до v_1, отколкото до v_2?

Решение. За разлика от основната задача, сега времената за изминаване на двата участъка няма да се описват с формулите (1), а съответно с:

(3) $$t_1 = \frac{s_1}{v_1} \quad \text{и} \quad t_2 = \frac{s_2}{v_2},$$

а общото време за движение – с формулата:

$$t = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2}.$$

При това положение общата средна скорост е:

(4) $$v_{\text{ср.}} = \frac{s_1 + s_2}{t} = \frac{s_1 + s_2}{\dfrac{s_1}{v_1} + \dfrac{s_2}{v_2}}.$$

1. Първият въпрос е кога общата средна скорост е равна на средно аритметичното от двете скорости, т.е. кога е изпълнено равенството:

$$\frac{s_1 + s_2}{\dfrac{s_1}{v_1} + \dfrac{s_2}{v_2}} = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Оттук лесно се получава, че $\dfrac{s_1}{s_2} = \dfrac{v_1}{v_2}$, т.е. когато изминатите пътища са пропорционални на средните скорости по съответните разстояния, тогава общата средна скорост е средно аритметично от двете средни скорости. Пример: ако колоездачът измине 10 km със скорост 40 km/h, а следващите 5 km със скорост 20 km/h, то общата му средна скорост ще бъде (40 + 20)/2 = 30 km/h.

Полученият резултат става физически по-прозрачен, ако равенството $\dfrac{s_1}{s_2} = \dfrac{v_1}{v_2}$ запишем във вида $\dfrac{s_1}{v_1} = \dfrac{s_2}{v_2}$ и отчетем, че всъщност от двете му страни стоят времената за изминаване на съответните пътища. Следователно отговорът на първата част на задачата можем да формулираме и така: общата средна скорост е средно аритметично от двете скорости, когато времената за изминаване на двете разстояния са равни.

2. Интуитивно ясно е, че общата средна скорост ще бъде по-близка до по-голямата скорост v_1, когато първото разстояние е достатъчно голямо спрямо второто. На въпроса **колко** по-голямо, обаче, може да се отговори само след пресмятане на съответните разлики (или отношения). Ще опитаме с разликите. От (4), след елементарни преобразувания намираме:

(5) $$v_1 - v_{\text{ср.}} = \frac{\dfrac{v_1}{v_2} - 1}{\dfrac{s_1}{v_1} + \dfrac{s_2}{v_2}} s_2 \qquad \text{и} \qquad v_{\text{ср.}} - v_2 = \frac{1 - \dfrac{v_2}{v_1}}{\dfrac{s_1}{v_1} + \dfrac{s_2}{v_2}} s_1.$$

В условието на задачата се пита кога $v_{\text{ср.}} - v_2 > v_1 - v_{\text{ср.}}$. Като използваме изразите (5) получаваме, че това неравенство е изпълнено, когато:

(6) $$\frac{s_1}{v_1} > \frac{s_2}{v_2}.$$

Като отчетем, че от двете страни на неравенството отново фигурират съответните времена, можем да формулираме отговора и на втората част на задачата: общата средна скорост е по-близо до средната скорост по първата част от разстоянието, когато времето за движение по тази първа част е по-голямо от времето за изминаване на втората част.

А сега да обобщим. Очевидно е, че по подобен начин бихме получили отговор и на въпроса кога $v_{ср.} - v_2 < v_1 - v_{ср.}$. Отговорът на този въпрос, заедно с отговорите, получени при решаване на част **1)** и част **2)** могат да се обобщят в едно просто правило:

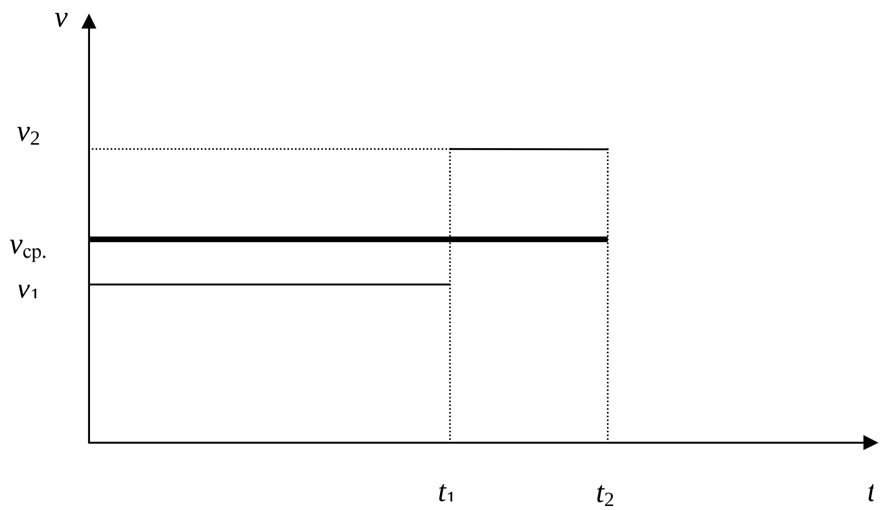
Когато общият път се състои от две части, изминати с различни средни скорости, общата средна скорост е по-близка до скоростта на онази част, за изминаване на която е употребено повече време.

Това заключение е интуитивно разбираемо и до него е възможно да се стигне и по по-прост начин, например, ако приложим метода на екстремните стойности. В случая това означава да си представим, че времето за изминаване на едната част от пътя е много, много по-голямо от времето, за изминаване на втората. Тогава, ако скоростта за изминаване на втората не е на порядъци по-различна от скоростта през първата, то очевидно общата средна скорост ще бъде почти равна на скоростта през първата част. Например, ако два часа колоездач се движи със скорост 30 km/h, то с каквато и (разумна) скорост да се движи следващите 5 секунди, общата му средна скорост няма да е съществено различна от 30 km/h.

Ако човек знае изведеното правило, изборът на правилния отговор на задачата, с която започнахме, става очевиден: тъй като двете разстояния (от A до B, и от B до A) са равни, а $v_2 < v_1$, то времето за връщане е по-дълго от времето за отиване. Затова и, съгласно с правилото, средната скорост е по-близка до по-малката от двете скорости.

При желание, може да се търсят обобщения на въпросното правилото по посока на увеличаване броя на интервалите, на които се разделя общият път, то да се преформулира по аналогия и за други (освен скоростта) величини, зависещи от времето, както и за величини, които зависят от параметър, различен от времето и т.н.

Графичен смисъл. Смисълът на изведеното правило става съвсем ясен, ако се използва графичният метод. За целта е достатъчно да се знае, че площта, разположена под графиката на скоростта като функция на времето, е равна на изминатия път. (Въпреки, че то не фигурира в Програмата по физика и астрономия за 8. клас, не са малко учителите, които запознават учениците си с него.) На фигурата по-долу е представена графично разглежданата ситуация: до момента t_1 тялото се движи със скорост v_1, а в интервала $(t_2 - t_1)$ – със скорост v_2. Изминатият път е равен на сумата от площите на двата правоъгълника – единият с основа t_1 и височина v_1, другият с основа $(t_2 - t_1)$ и височина v_2. По определение средната скорост е равна онази постоянна скорост, с която за цялото време тялото изминава същия път. Това означава, че на графиката правоъгълникът с основа t_2 и височина $v_{ср.}$ трябва да има същата площ, колкото сумата от поменатите два правоъгълника. А това означава, че площите на по-малките правоъгълници – единият с основа t_1 и височина $v_{ср.} - v_1$, а другият – с основа $(t_2 - t_1)$ и височина $(v_2 - v_{ср.})$, трябва да са равни. За да е изпълнено това условие е необходимо правоъгълникът с по-дълга основа (в случая – първият) да има по-малка височина. А това не означава нищо друго, освен че средната скорост е по-близка до скоростта, с която тялото се е движило по-дълго време.



Последен вариант. Да се върнем към началната задача, или, по-скоро, да формулираме подобна на нея, но вече значително по-сложна:

Задача. Колоездач изминава равномерно определена част от пътя между два града, след което останалата част изминава с друга постоянна скорост. Общата средна скорост на пътуването между градовете:

А) е по-близка до скоростта по по-дългата част от пътя;
Б) е по-близка до скоростта по онази част от пътя, за изминаване на която е употребено по-дълго време.
В) зависи само от скоростите по двете части от пътя.
Г) Трите твърдения А), Б) и В) не са верни.

Посочете вярното твърдение.

Според формулираното по-горе правило, верният отговор е Б).

Благодаря на доц. Виктор Иванов, който насочи вниманието ми към геометричната интерпретация на изведеното “правило” за средната скорост.